

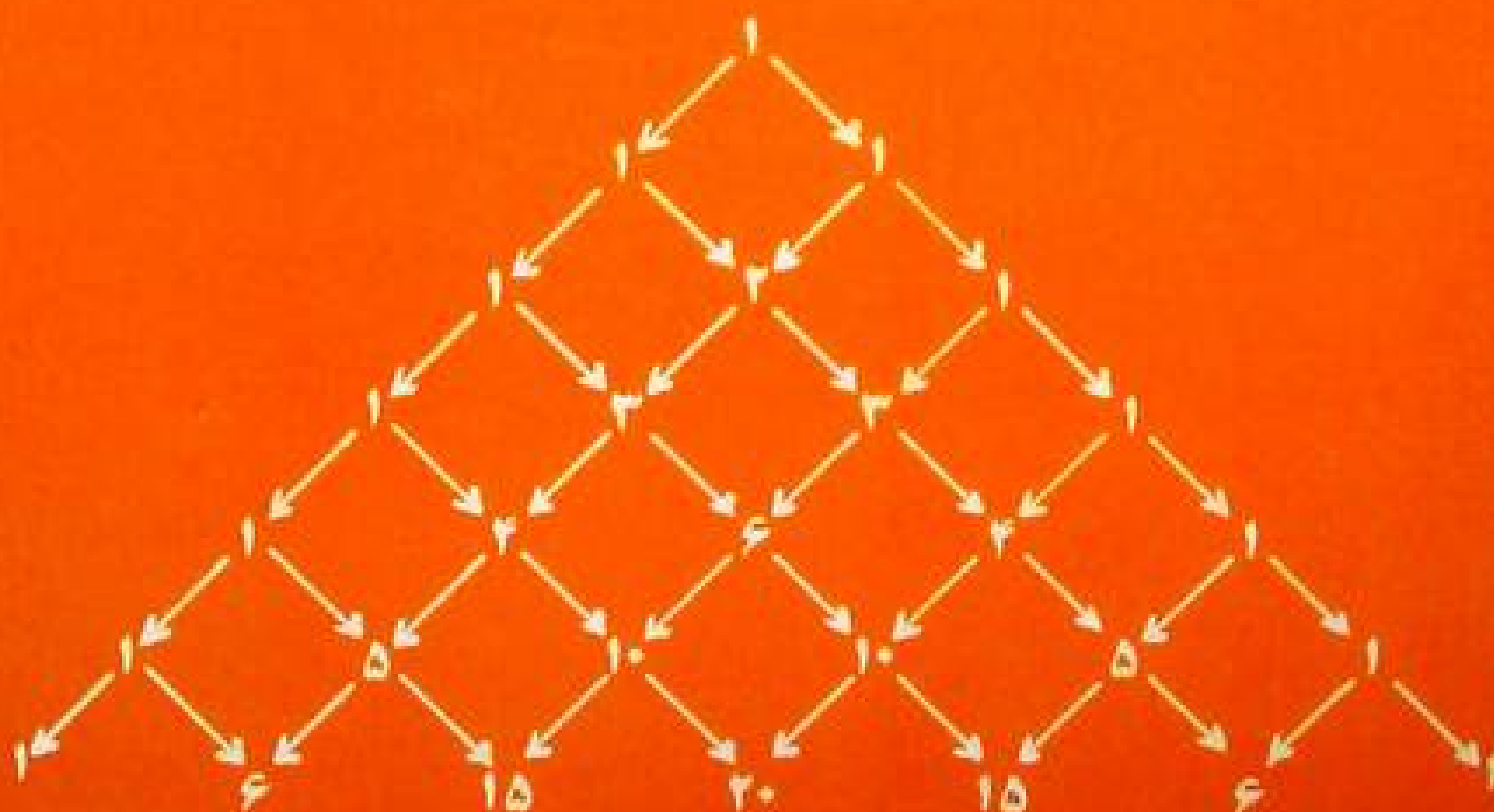
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
[illegible]

جبر

سال سوم
آموزش متوسطهٔ عمومی
ریاضی و فیزیک

۲۶۳

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$



فصل ۱

بسم الله الرحمن الرحیم

محاسبه باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$

چندجمله‌ای $P(x)=A_1x^n+A_2x^{n-1}+\cdots+A_{n+1}$ را درنظرگرفته خارج قسمت تقسیم آن بر $x-a$، که خود یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ است با $Q(x)$ و باقیمانده تقسیم را که از درجهٔ صفر و یکعدد می‌باشد با R نمایش می‌دهیم بنابرتعریف تقسیم داریم:

$$P(x)\equiv(x-a)Q(x)+R$$

این اتحاد بازاء همهٔ مقادیر x و بخصوص بازاء $x=a$ برقرار است. پس:

$$P(a)=(a-a)Q(a)+R\Rightarrow P(a)=R$$

یعنی، باقیمانده‌تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$را بر $x-a$ برابر $P(a)$ است بعبارت دیگر، برای تعیین باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ کافی است $P(a)$ را حساب کنیم.

مثال ۱ ـ باقیمانده تقسیم $p(x)=2x^3-x^2-3x-1$ را بر $x-2$ عبارت است از:

$$R=P(2)=2(2)^3-(2)^2-3(2)-1=5$$

مثال ۲ ـ باقیمانده تقسیم $P(x)=2x^3+3x^2-x+2$ بر $x+2$ عبارت است از:

$$R=P(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-(-2)+2=0$$

یعنی عبارت $2x^3+3x^2-x+2$ بر $x+2$ بخش‌پذیراست.

بنابراین اگر $p(a)$ برابر صفرشود آنگاه $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر خواهد بود.

محاسبه خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$

چندجمله‌ای درجه‌سوم $p(x)=A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$ رادرنظر گرفته‌خارج‌قسمت تقسیم آن را بر $x-a$ که از درجه دوم است، چرا؟ با $B_1x^2+B_2x+B_3$ و باقیمانده تقسیم رابا R نشان می‌دهیم می‌خواهیم بدون عمل تقسیم ضرایب B_1 و B_2 و B_3 و درنتیجه خارج‌قسمت را به دست آوریم، طبق تعریف تقسیم داریم:

$$A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\equiv(x-a)(B_1x^2+B_2x+B_3)+R$$

پس:

$$A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4\equiv B_1x^3+(B_2-aB_1)x^2+(B_3-aB_2)x-aB_3+R$$

بنا بر این باید داشته باشیم:

$$A_1=B_1 \text{ و } A_2=B_2-aB_1 \text{ و } A_3=B_3-aB_2 \text{ و } A_4=R-aB_3$$

و یا:

$$B_1=A_1 \qquad B_2=A_2+aB_1 \text{ و } B_3=A_3+aB_2 \text{ و } R=A_4+aB_3$$

در نتیجه ضرایب جمله‌های خارج قسمت و مانده تقسیم را می‌توان به ترتیب زیر به دست آورد:

ـ ضریب جملهٔ اول خارج قسمت با ضریب جملهٔ اول مقسوم برابر است $B_1=A_1$.

ـ ضریب جملهٔ دوم خارج قسمت برابراست باضریب جملهٔ دوم مقسوم باضافهٔ حاصلضرب ریشه مقسوم علیه در ضریب جملهٔ اول خارج قسمت $B_2=A_2+aB_1$.

ـ ضریب جملهٔ سوم خارج قسمت برابراست باضریب جملهٔ سوم مقسوم باضافهٔ حاصلضرب ریشه مقسوم علیه در ضریب جملهٔ دوم خارج قسمت $B_3=A_3+aB_2$

این مطلب درجدول زیرخلاصه شده است (این روش محاسبه بروش هورنر معروف‌است)

a	A_1	A_2	A_3	A_4
	$B_1=A_1$	$B_2=A_2+aB_1$	$B_3=A_3+aB_2$	$R=A_4+aB_3$

باقیمانده این تقسیم برابر $R=A_4+aB_3$ است.

در حالت کلی، یعنی درتقسیم یك چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه n بر $x-a$ نیزبهمین ترتیب ضریب‌ها محاسبه می‌شود. یعنی ضریب هرجمله ازخارج قسمت برابر است باضریب جملهٔهمنامش در مقسوم باضافهٔ حاصلضرب ریشه مقسوم علیه در ضریب جملهٔ ماقبلش در خارج قسمت

$$\boxed{B_n=A_n+aB_{n-1}}$$

مثال ۱ ـ خارج قسمت تقسیم $2x^3+x^2-3x+5$ را بر $x-2$ به‌دست آورید.

$$a=2 \text{ و } Q(x)=B_1x^2+B_2x+B_3$$

$B_1=2$ و $B_2=1+2\times 2=5$ و $B_3=-3+5\times 2=7$ و $R=5+7\times 2=19$

2	2	1	-3	5
	$B_1=2$	$B_2=1+2\times 2$ $=5$	$B_3=-3+2\times 5$ $=7$	$R=5+2\times 7$ $=19$

مثال ۳ ـ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم x^5+2x^3+x-1 را بر $x+1$ بدست آورید:

$$a=-1 \qquad , P(x)=x^5+0x^4+2x^3+0x^2+x-1$$
$$Q(x)=B_1x^4+B_2x^3+B_3x^2+B_4x+B_5$$

پس:

$B_1=1$ و $B_2=0+(-1)\times+1=-1$ و $B_3=2+(-1\times-1)=3$

$B_4=0+(-1)3=-3$ و $B_5=1(-3\times-1)=4$

$R=-1+(4\times-1)=-5 \qquad Q(x)=x^4-x^3+3x^2-3x+4$

محاسبهٔ فوق در جدول زیر تنظیم شده است:

-1	1	0	2	0
	$B_1=1$	$B_2=0+(-1)1$ $=-1$	$B_3=2+(-1)\times(-1)$ $=3$	$B_4=0+(-1)(3)$ $=-3$

1	-1
$B_5=1+(-1)(-3)$ $=4$	$R=-1+(-1\times4)$ $=-5$

حالات خاص:

توجه ـ اگر R باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ باشد داریم:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=R$$

محاسبهٔ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^n\pm a^n$ بر $x\pm a$

الف ـ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^n\pm a^n$ بر $x-a$

داریم:

$$x=a \qquad P(x)=x^n+0x^{n-1}+0x^{n-2}+\cdots\pm a^n$$
$$Q(x)=B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+B_3x^{n-3}+\cdots+B_n$$

پس:

$B_1=1$ و $B_2=0+a\times1=a$ و $B_3=0+a\times a=a^2$ و $\cdots B_n=a^{n-1}$

در نتیجه:

$$Q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1}$$

و

$$R=P(a)=a^n\pm a^n$$

بنابراین $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش‌پذیر است و $x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر نیست.

ب- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^n \pm a^n$ بر $x + a$

به ترتیب فوق معلوم می‌شود که:

$$x = -a \text{ و } Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + (-a)^{n-1}$$
$$R = p(a) = (-a)^n \pm a^n$$

بنابراین $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیراست وقتی n فرد باشد و $x^n - a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است وقتی n زوج باشد.

مثال ۱ - خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^5 + 1$ را بر $x + 1$ به دست آورید.

$x^5 + 1^5$ بر $x + 1$ بخش پذیر بوده وخارج قسمت آن عبارتست از:

$$Q(x) = x^4 - 1 \times x^3 + 1 \times x^2 - 1 \times x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

مثال ۲ - خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $x^4 - 16$ را بر $x - 2$ به دست آورید.

چون $x^4 - 16 = x^4 - 2^4$ پس این عبارت بر $x - 2$ بخش‌پذیر بوده و خارج قسمت آن عبارت است از:

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2^2x + 2^3 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

حل چند مسألهٔ نمونه

۱- درعبارت $P(x) = 2x^4 + mx^2 + n$ مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که باقیمانده تقسیم این عبارت بر $x + 1$ برابر -3 و بر $x - 2$ برابر 3 باشد.

حل- باید داشته باشیم $P(-1) = -3$ و $P(2) = 3$. پس:

$$\begin{cases} P(-1) = 2 + m + n = -3 \\ P(2) = 32 + 4m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = -5 \\ 4m + n = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = 3 \end{cases}$$

۲- مقادیر m و n را به طوری تعیین کنید که عبارت $x^4 + mx + n$ بر $x^2 - 2x - 3$ بخش‌پذیر باشد.

راه اول - وقتی که مقسوم علیه قابل تجزیه‌است می نویسیم:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

لذا مقسوم باید بر هر یك از دو عبارت $x - 3$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد یعنی باقیمانده $P(x)$ بر $x - 3$ و $x + 1$ یا $P(3)$ و $P(-1)$ برابر صفر باشند.

$$\begin{cases} P(3)=81+3m+n=0 \\ P(-1)=1-m+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n=-81 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-20 \\ n=-21 \end{cases}$$

راه دوم - برای اینکه $p(x)$ بر x^2-2x-3 بخش‌پذیر باشد باید سه‌جمله‌ای درجه‌دوم به‌صورت ax^2+bx+c را به‌قسمی تعیین کرد که داشته باشیم:

$$x^4+mx+n\equiv(x^2-2x-3)(ax^2+bx+c)$$

$a=1$ بوده و داریم:

$$x^4+mx+n\equiv x^4-2x^3-3x^2+bx^3-2bx^2-3bx+cx^2-2cx-3c$$

یا:

$$x^4+mx+n\equiv x^4+(b-2)x^3+(c-2b-3)x^2-(2c+3b)x-3c$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$b-2=0$ و $c-2b-3=0$ $\quad$ $-2c-3b=m$ و $-3c=n$

در نتیجه

$b=2$ و $c=7$ و $m=-20$ و $n=-21$

با این روش علاوه بر مقادیر m و n خارج قسمت تقسیم که x^2+2x+7 می‌باشد نیز بدست می‌آید.

راه سوم - x^4+mx+n را بر x^2-2x-3 تقسیم کرده باقیمانده تقسیم را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

پس از تقسیم خارج قسمت x^2+2x+7 و باقیمانده $(m+20)x+n+21$ به‌دست می‌آید پس[1]:

$$R=(m+20)x+n+21\equiv 0$$

در نتیجه $m=-20$ و $n=-21$.

بسط دوجمله‌ای خیام، نیوتن

می‌دانید که:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

۱ــ هرگاه عبارتی بازاء جمیع مقادیر متغیر برابر صفر باشد آن عبارت را متحد صفر می‌نامیم و اگر متغیر ، مثلا ، x باشد می‌نویسیم : $f(x)\equiv 0$ ، که دراینصورت ضرائب کلیه درجات متغیر برابر صفر خواهد بود .

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

. . . . . .

. . . . . .

در جبر هر عبارت به‌صورت $(a+b)^n$ را دوجمله‌ای نیوتن و صورت چندجمله‌ای آن را بسط دو جمله‌ای نیوتن می گویند.

اگر ضرایب این چند جمله‌ای‌ها را به‌ترتیب زیر بنویسیم:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

شکلی شبیه مثلث حاصل می‌شود هر عدد این جدول، غیر از ۱ ها که ثابت هستند (اعدادی که در رأس و امتداد ساقهای مثلث قرار دارند)، برابر است با مجموع دو عدد که در سطر بالای آن، یکی سمت چپ ودیگری سمت راست آن عدد نوشته شده‌است. بنابراین به کمك اعداد واقع در هرسطر می‌توان اعداد واقع در سطر بعد را نوشت. مثلا سطر ششم جدول عبارتست از:

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

این اعداد ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^5$ بوده و داریم:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

لذا با ادامهٔ سطرهای مثلث، ضرایب بسط هر توانی از $(a+b)$ را می توان به‌دست آورد.

مرتب نمودن ضرایب به‌این صورت و ارتباط بین این اعداد را ابتدا خیام و سپس پاسکال کشف کرده ازاینجهت این مثلث بنام آنها خوانده شده است.

باملاحظهٔ ضرایب موجود و بادرنظر گرفتن آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که بسط دوجمله‌ای نیوتن دارای ویژگیهائی است که با کمك آنها نیز می توان به ازای هرعدد طبیعی n، عبارت $(a+b)^n$ را به‌صورت یك چندجمله‌ای تبدیل کرده و ضرایب جملات را حساب کرد.

این ویژگیها به‌شرح زیرند:

۱- دارای $(n+1)$ جمله وبرحسب a و b چندجمله‌ای درجهٔ n متقارن وهمگن است.

۲- وقتی برحسب توان نزولی a نوشته شود با جملهٔ a^n شروع و با جملهٔ b^n ختم می‌شود.

۳- در هر جمله در مقایسه با جملهٔ قبل یك واحد از توان a کسر و یك واحد به توان b اضافه می‌شود.

۴- ضریب هر جمله برابر است با حاصلضرب ضریب جملهٔ قبل در توان حرف a در آن

جمله، تقسیم بر تعداد جمله‌هائی که تا آن جمله نوشته شده است.

۵- جمله‌هائی که از دو طرف به‌یك فاصله باشند ضریبهایی مساوی دارند.

مثال:

$$(a+b)^{۷}=a^{۷}+۷a^{۶}b+۲۱a^{۵}b^{۲}+۳۵a^{۴}b^{۳}+۳۵a^{۳}b^{۴}+۲۱a^{۲}b^{۵}+۷ab^{۶}+b^{۷}$$

با این مقدمات در حالت کلی داریم:

$$(a+b)^{n}=a^{n}+na^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^{۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲\times۳}a^{n-۳}b^{۳}+\cdots+b^{n}$$

هرگاه در دستور فوق b را به $-b$ تبدیل کنیم، ضرایب جملات بالا یك در میان مثبت و منفی می‌شود.

$$(a-b)^{n}=a^{n}-na^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^{۲}-\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲\times۳}a^{n-۳}b^{۳}+\cdots+(-۱)^{n}b^{n}$$

تبصره ــ اگر در دوجمله‌ای نیوتن بجای a و b هر دو عدد ۱ قرار دهیم تساوی عددی زیر را خواهیم داشت:

$$(۱+۱)^{n}=۱+n+\frac{n(n-۱)}{۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲\times۳}+\cdots+۱$$

یعنی مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^{n}$ برابر است با ۲^{n}

مجموع ضرائب بسط $(a-b)^{n}$ باکدام عدد برابر است ؟

تمرین

۱- این دوجمله‌ایها را به‌ضرب عاملها تجزیه کنید:

الف) $x^{۳}-y^{۳}$، ب) $۸x^{۳}+۲۷y^{۳}$،

ج) $a^{۵}+b^{۵}$، د) $x^{۴}-۱۶y^{۴}$،

ه) $۱۲۸a^{۷}+b^{۱۴}$، و) $۶۴x^{۶}-y^{۶}z^{۱۲}$، ز) $x^{۷m}-y^{۷n}$

۲- a را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای $ax^{۲}+(۲a-۱)x+۳$ بر $x+۱$ بخش پذیر باشد. سپس، خارج قسمت تقسیم را پیدا کنید.

۳- چند جمله‌ای $۱۶x^{۴}-۲۴x^{۳}+۸x^{۲}+۱۰x-۷$ را برحسب توانهای نزولی $(۲x-۱)$ منظم کنید.

۴- m و n راطوری پیدا کنید که چندجمله‌ای $x^{۴}-(m+n)x^{۳}+(n+۲)x^{۲}-x-m$ بر $x^{۲}-۱$ بخش‌پذیر باشد.

۵- a و b را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای:

$2ax^4+(b-2a)x^3-bx^2-4bx-2$ بر x^2-x-2 بخش‌پذیر باشد.

۶ـ ثابت کنید که عدد $13^{2n}-1$ بر ۱۶۸ بخش‌پذیر است (n، عددی است درست و مثبت).

۷ـ ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $x+y+z=0$، داریم:

$x^3+y^3+z^3=3xyz$،

۸ـ m و n را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-2x+4 بخش‌پذیر باشد.

۹ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به‌ترتیب برابر ۲ و ۵− باشد، باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ را بر $(x-1)(x+2)$ پیدا کنید.

۱۰ـ چندجمله‌ای درجهٔ سومی پیدا کنید که باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ و $x-2$ و $x-3$ برابر ۶ و ضمناً بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۱۱ـ بسط این دوجمله‌ایها را بدست آورید:

الف) $(a+b)^3$،	ب) $(x-y)^4$،
ج) $(a+b)^5$،	د) $(2a+3b)^4$،
ه) $(3x-2y)^5$،	و) $(x+y)^7$،
ز) $(1-x)^6$،	ح) $(3+2x)^5$

۱۲ـ مجموع جبری ضریبهای عددی را در چندجمله‌ای که از بسط عبارت زیر به‌دست می‌آید، پیدا کنید:

$$(4x^3-3x^2+7x-7)^{18}+(x^2-3x+2)^5-13$$

۱۳ـ اگر مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^{2n}$ به‌اندازهٔ ۵۶ واحد از مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ بیشتر باشد، مقدار n را پیدا کنید و سپس $(a+b)^{2n}$ را بسط دهید.

۱۴ـ در چند جمله‌ای $P(x)$ اتحاد : $P(2-x)+2P(2+x)\equiv -3x$ برقرار است $P(x)$ را معلوم کنید .

۱۵ـ باقیمانده تقسیم x^{47} را بر x^2+1 به‌دست‌آورید .

۱۶ـ ثابت کنید عدد $2^{84n}-1$ برعدد ۶۵ بخش‌پذیر است (n عدد طبیعی است) .

۱۷ـ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که چند جمله‌ای $3x^3-2x^2+ax+b$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد .

فاصله‌ها درمجموعه اعداد حقیقی

اگر a و b دو عدد حقیقی باشد $(a<b)$ منظور از فاصلهٔ بسته a و b عبارت است از مجموعهٔ عدد a و عدد b و کلیهٔ اعداد حقیقی که از a بزرگتر و از b کوچکتر باشند. فاصلهٔ بستهٔ **a و b** را این‌طور نمایش می‌دهند:

$$[a \text{ و } b]$$

بنابراین اگر بگوییم که x متعلق به‌فاصلهٔ بستهٔ a و b است منظور آن است که:

$$a \leqslant x \leqslant b \Longleftrightarrow x \in [a \text{ و } b]$$

مثال:

$$[۲ \text{ و } ۵] = \{x | x \in R \text{ و } ۲ \leqslant x \leqslant ۵\}$$

اگر نقطه‌های $A(a)$ و $B(b)$ دو نقطه از محور اعداد باشد فاصلهٔ بستهٔ a و b عبارت است از مجموعه نقطه‌های واقع برقطعه خط AB بنابراین نمایش فاصلهٔ [۵ و ۲] عبارت است از:



مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از a وکوچکتر از b (بدون a و b) فاصلهٔ باز a و b را تشکیل می‌دهند که به‌این صورت نمایش داده می‌شود:

$$]a \text{ و } b[\quad \text{یا} \quad (a \text{ و } b)$$

پس اگر x متعلق به‌فاصلهٔ باز a و b باشد داریم: $x \in]a \text{ و } b[\Longleftrightarrow a<x<b$

مثال:

$$]۲ \text{ و } ۵[= \{x | x \in R \text{ و } ۲<x<۵\}$$

نمایش فاصلهٔ]۵ و ۲[برروی محور اعداد چنین خواهد بود:



دایره‌های کوچك توخالی درنقطه‌های A و B نمایش آن است که a و b متعلق به‌این فاصله نیست.

ممکن است فاصلهٔ a و b از طرف a باز و از طرف b بسته باشد که در این صورت منظور مجموعهٔ کلیهٔ اعداد بزرگتر از a و کوچکتر از b و عدد b می‌باشد که بدین صورت نمایش داده

می‌شود:

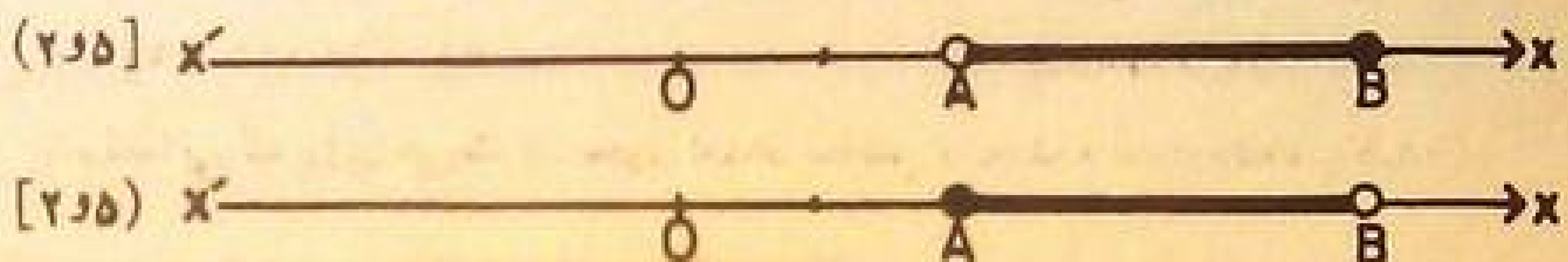
$$]a \text{ و } b]$$

به‌همین ترتیب فاصله $]b$ و $a]$ را می‌توان تعریف کرد.

مثال: $]۲ \text{ و } ۵] = \{x | x \in R \quad ۲ < x \leqslant ۵\}$

$[۲ \text{ و } ۵[= \{x | x \in R \quad ۲ \leqslant x < ۵\}$

نمایش فاصله‌های [۵ و ۲[و]۵ و ۲] برروی محور اعداد چنین است:

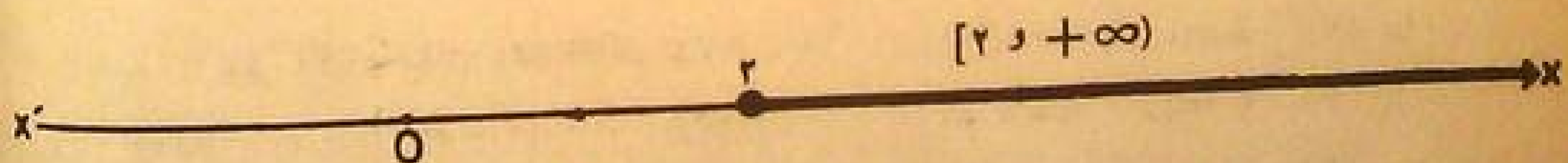


دایره‌های کوچکی که داخل آنها سیاه شده است نمایش آن است که آن نقطه متعلق به این فاصله هست.

پس به‌طور خلاصه:

$a \leqslant x \leqslant b \Leftrightarrow x \in [a \text{ و } b]$
$a < x < b \Leftrightarrow x \in]a \text{ و } b[$
$a \leqslant x < b \Leftrightarrow x \in [a \text{ و } b[$
$a < x \leqslant b \Leftrightarrow x \in]a \text{ و } b]$

مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگتر از a و خود a را به‌صورت $[a \text{ و } +\infty[$ نمایش می‌دهند. (فاصلهٔ a و به علاوهٔ بی‌نهایت).



مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچکتر از a وخود a را به صورت $]-\infty \text{ و } a]$ نمایش می‌دهند. (فاصلهٔ منهای بی‌نهایت و a)



مجموعهٔ اعداد حقیقی را به‌صورت $]-\infty \text{ و } +\infty[$ نمایش می‌دهند. (فاصلهٔ منهای بی‌نهایت و به‌علاوهٔ بی‌نهایت)

به همین ترتیب مجموعهٔ اعداد مثبت و صفر عبارت است از فاصلهٔ]∞+ و ۰] ومجموعهٔ اعداد منفی عبارت است از:]۰ و ∞−[

تمرین

فاصله‌های زیر را روی محور اعداد نمایش دهید:

۱) [−۳ و +۳]   ۲)]−۲ و ۳]

۳) [۱ و ۲[۴)]−۲ و ۲[

۵)]۱ و +∞[۶)]−∞ و ۲]

فاصله‌هایی که روی هریک از محور اعداد نمایش داده شده است مشخص کنید:

۷)


۸)


۹)


۱۰)


۱۱)


مجموعه‌های زیر را به‌صورت فاصله نمایش دهید:

۱۲) $A=\{x|۲\leqslant x<۷\}$ ۱۳) $B=\{x|-۱<x\leqslant ۴\}$

۱۴) $C=\{x|۱\leqslant x\leqslant ۵\}$ ۱۵) $D=\{x|x\geqslant ۳\}$

۱۶) $E=\{x|x<-۲\}$ ۱۷) $F=\{x|x\leqslant -۱\}$

فاصله‌های زیر را به‌صورت مجموعه نمایش دهید:

۱۸) $A=$[−۱ و ۲[۱۹) $B=$]۲ و +∞[

۲۰) $C=$]−∞ و ۲]   ۲۱) $D=$]۲ و ۵[

با استفاده از تعریف فاصله، عبارات زیر را خلاصه کنید:

۲۲)]۴ و ۸]∪[۸ و ۱۲[۲۳)]۴ و ۸]∩[۶ و ۹]

۲۴)]۲ و ۶[∩]۶ و ۹[۲۵)]۲ و ۶]∩[۶ و ۹]

فصل ۳

تابع

مفهوم تابع

همانطورکه در ریاضیات جدید سال دوم دیده‌اید منظور از یك تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای است از A به B که در آن هیچ دوزوج مرتب متفاوتی با عضوهای اول مساوی وجود نداشته‌باشد. به‌عبارت دیگر اگر f تابعی از A به B باشدآنگاه f زیرمجموعه‌ای ازحاصلضرب کارتزین $A\times B$ است به‌قسمی که اگر $(x, y_1)\in f$ و $(x, y_2)\in f$ آنوقت $y_1=y_2$.

مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضاء تابع f را دامنه (دامنهٔ تعریف) f ومجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضاء f را برد f می‌خوانند و آنها را به‌ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند. A را مجموعهٔ آغاز یامبداء و B را مجموعه‌انجام یامقصدیاحوزهٔمقادیرمی‌خوانند. هرگاه (x, y) عضودلخواهی از f باشد، آنگاه مؤلفهٔ اول یعنی x را متغیر مستقل و مؤلفهٔ دوم یعنی y را متغیر تابع می‌خوانند.

هرگاه f تابعی از A به B باشد، عضو دوم هر زوج مرتب در f بطور یگانه‌ای از روی عضواول‌آن زوج مرتب مشخص می‌شود، وبدین‌ترتیب ازروی f قانون یادستوری به‌دست‌می‌آید که به‌کمك آن میتوان به‌هرعضو x ازدامنهٔ f یك و تنها یك عضو y متعلق به‌برد f متناظرساخت به‌قسمی که $(x, y)\in f$. این y را با $f(x)$ نشان می‌دهند و مقدار تابع در x می‌نامند. به‌عکس هرگاه دستور یا قانونی داشته باشیم که به هر عضو x از یك زیرمجموعهٔ A یك و تنها یك عضو $y\in B$ را نسبت دهد، مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x, y) که بدین ترتیب حاصل می‌شود تابعی از A به B خواهد بود. از این رو معمولا برای مشخص‌کردن تابع دامنهٔ آن و قانون یا دستوررا می‌دهند، و اگر دامنه داده نشود، باید آن را بزرگترین زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ آغاز (مورد بحث) اختیارکردکه آن قانون برای آن با معنی است.

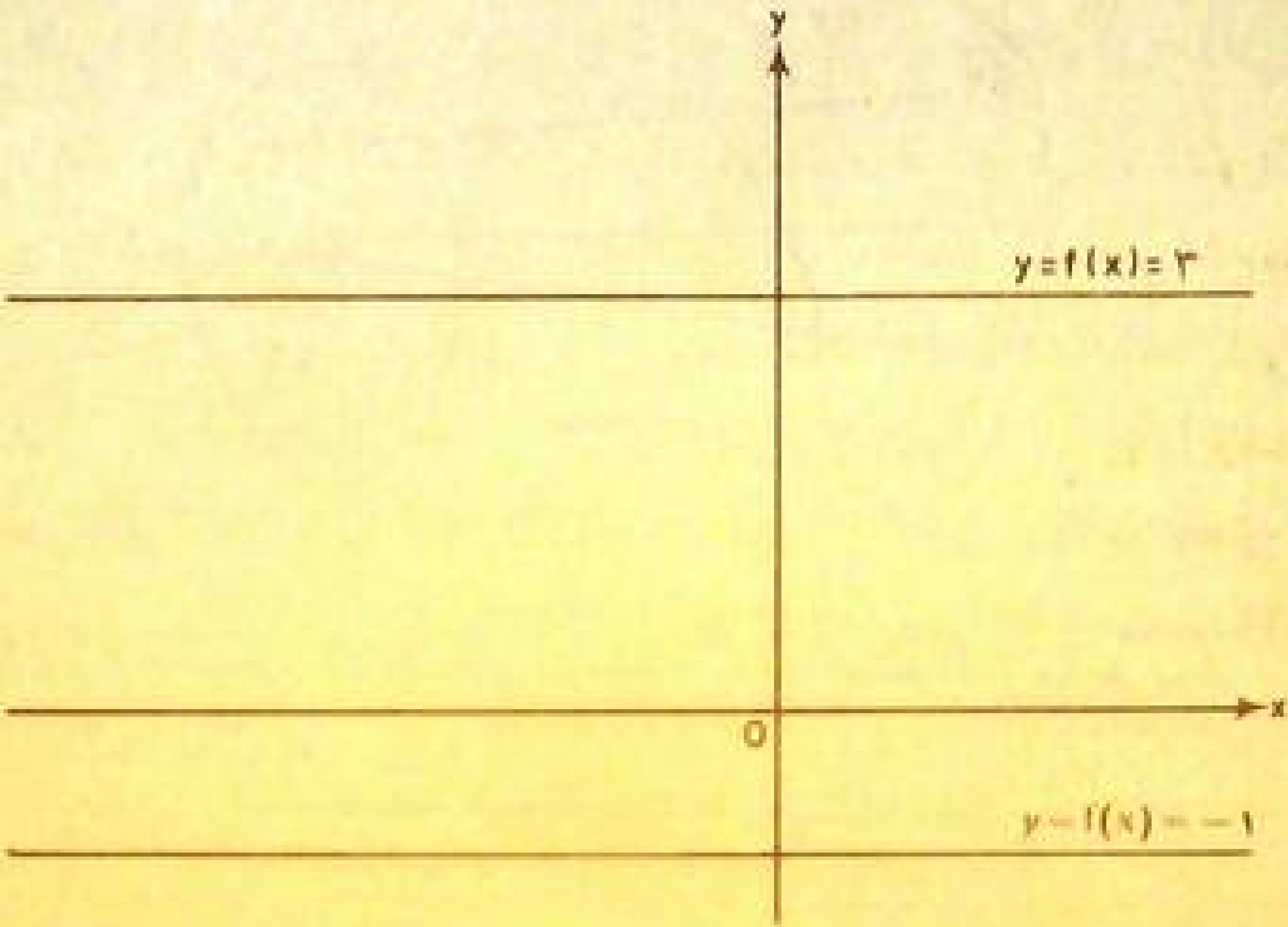
هرگاه دامنه و بردتابع f زیرمجموعه‌هائی از R، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، باشندآنگاه f را یك تابع عددی یا حقیقی می‌نامند.

فرض‌کنید f تابعی حقیقی باشد، در اینصورت می‌توان به هر عضو $(x, y)\in f$ یك و تنها یك نقطه در صفحهٔ مختصات دکارتی نسبت داد. مجموعهٔ حاصل از این نقاط در صفحه را نمودار تابع f می‌نامند.

حال به ذکر چند مثال در مورد تابع می‌پردازیم:

مثال ۱ ــ فرض کنیدکه c عددی حقیقی وثابت‌باشد. مجموعهٔ $f=\{(x, c)|x\in R\}$ تابعی است از R به R که آن را تابع ثابت می‌گویند. این تابع را می‌توان توسط دستور $f(x)=c$

بیان کرد. دامنهٔ تعریف f برابر است با R و بردآن مجموعهٔ $\{c\}$ می‌باشد. همانطور که در کتاب جبر وحساب سال دوم دیده‌اید نمودار این تابع خط افقی $y=c$ است. در شکل زیراین نمودار برای مقادیر $c=-۱$ و $c=۳$ رسم شده است.



مثال ۲ ــ فرض کنید:

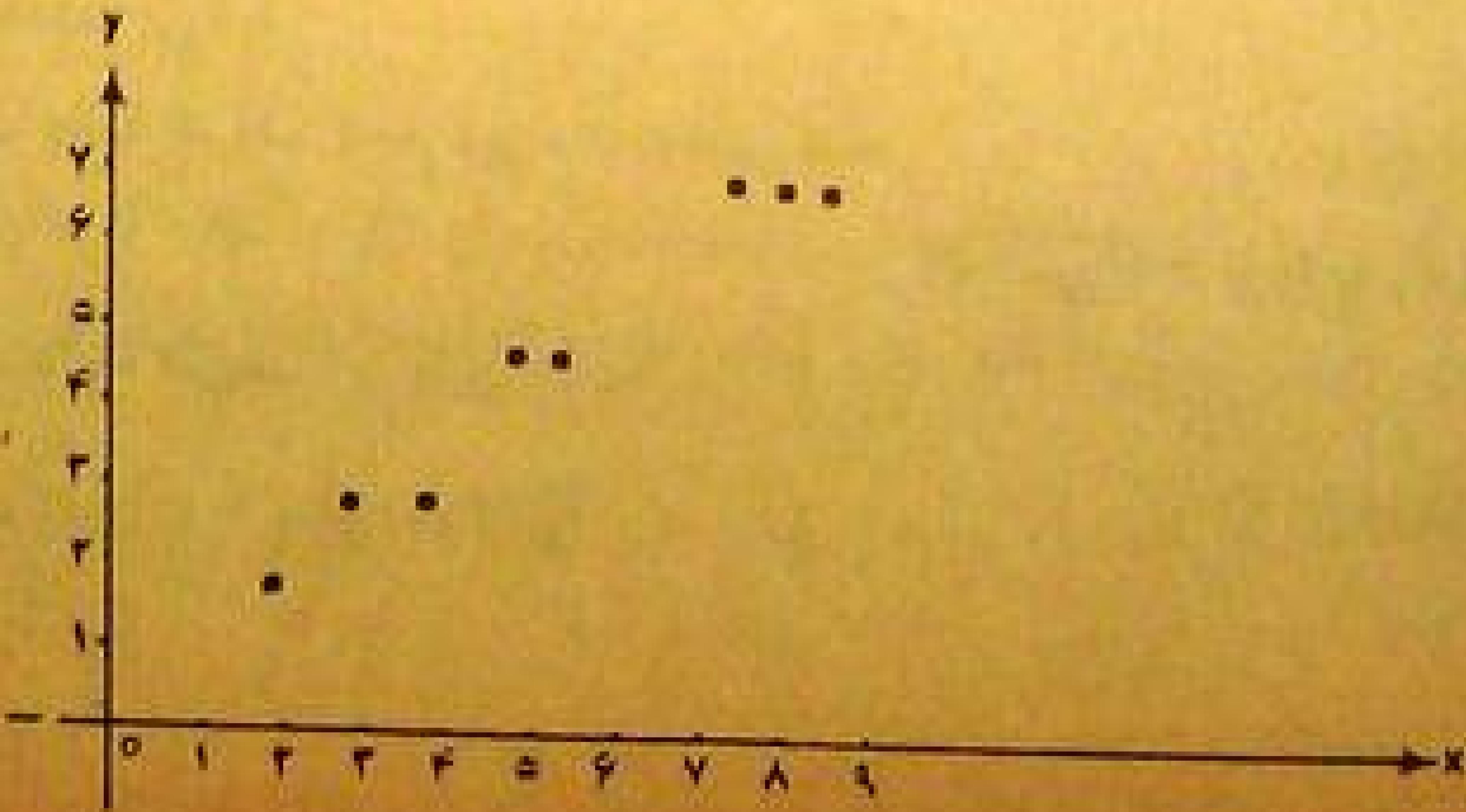
$A=B=\{۲, ۳, ۴, \cdots\}$. رابطهٔ

$f=\{(x, y)|x\in A$ و y بزرگترین عدد اول نابزرگتر از x $\}$

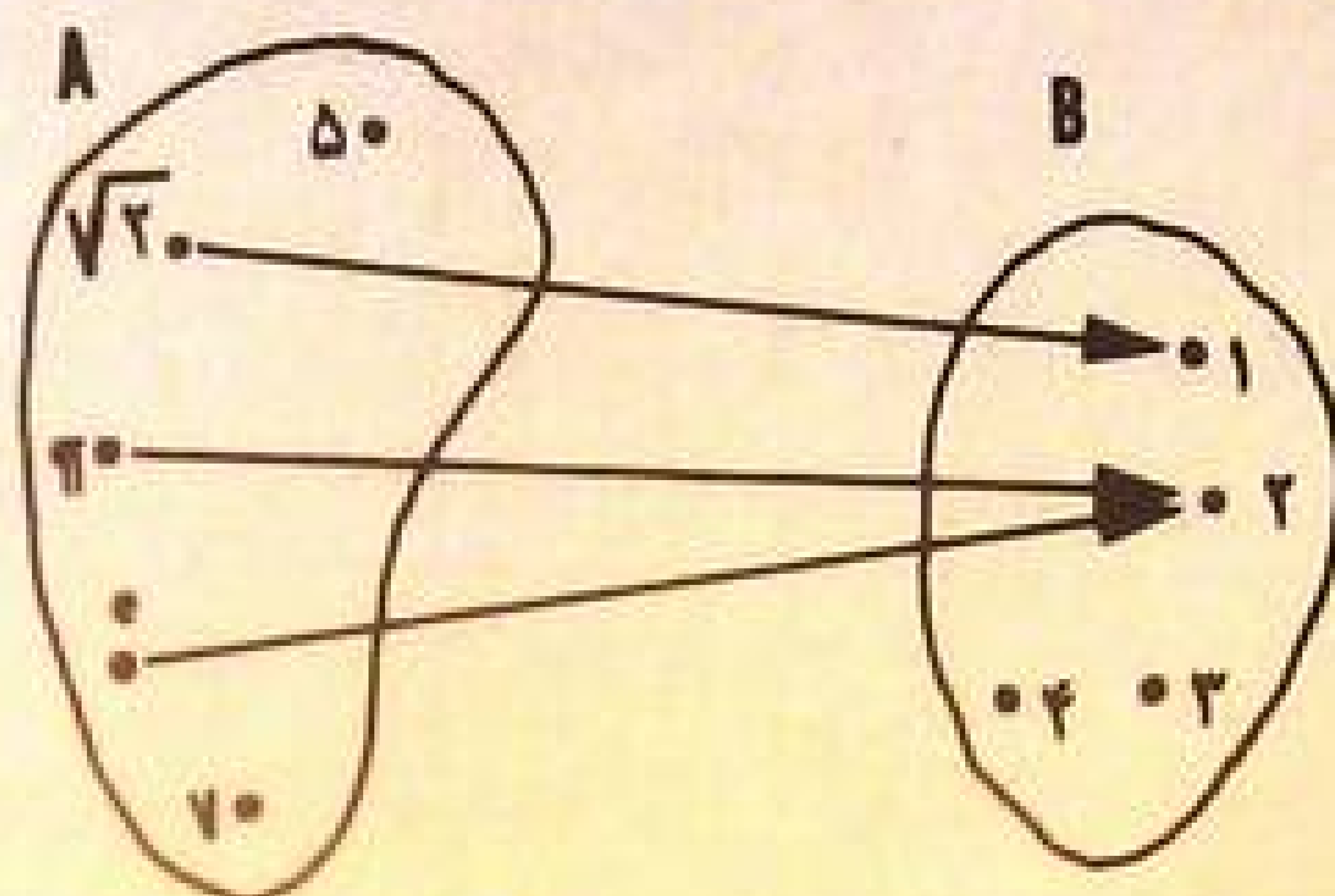
تابعی است از A به B. مقادیر این تابع برای $x=۲, ۳, \cdots, ۹$ چنین‌اند:

$f(۲)=۲$	$f(۶)=۵$
$f(۳)=۳$	$f(۷)=۷$
$f(۴)=۳$	$f(۸)=۷$
$f(۵)=۵$	$f(۹)=۷$

در این مثال نمی‌توان فرمولی برای f به‌دست آورد که به کمک آن مقادیر تابع را محاسبه کرد. دامنهٔ f برابر A و برد آن مجموعهٔ همهٔ اعداد اول است. قسمتی از نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است.



مثال ۳ ــ فرض کنید $A=\{۵, \sqrt{۲}, \pi, e, v\}$ و $B=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$. شکل زیر تابع f از A به B را مشخص می کند.



دامنه و برد f و دستور $y=f(x)$ را مشخص کنید، مجموعهٔ f را بنویسید. (A مجموعه‌آغاز یا مبداء است.)

حل ــ با ملاحظهٔ شکل معلوم می‌شود که دامنه و برد f چنین است:

$D_f=\{\sqrt{۲}, \pi, e\}$

$R_f=\{۱, ۲\}$

دستور $y=f(x)$ آنرا مشخص کنید

x	۵	$\sqrt{۲}$	π	e	v
$f(x)=y$		۱	۲	۲	

مجموعهٔ f چنین است:

$f=\{(\sqrt{۲}, ۱)$ و $(\pi, ۲)$ و $(e, ۲)\}$

مثال ۴ ــ معین کنید رابطهٔ زیر تابع است یا خیر:

$E=\{(x, y) \mid x^۲+y^۲-۱=۰\}$

جواب ــ بدیهی است که این رابطه تابع نیست زیرا مثلا به‌ازای $x=۰$ دو مقدار ۱ و ۱ــ برای y بدست می‌آید.

مثال ۵ ــ دامنهٔ تعریف تابع زیر را مشخص کنید:

$F=\{(x, y) \mid y=\sqrt{x-۱}\}$

جواب ــ دامنهٔ تعریف آن چنین است:

$D_f=\{x \mid x\geqslant ۱\}$

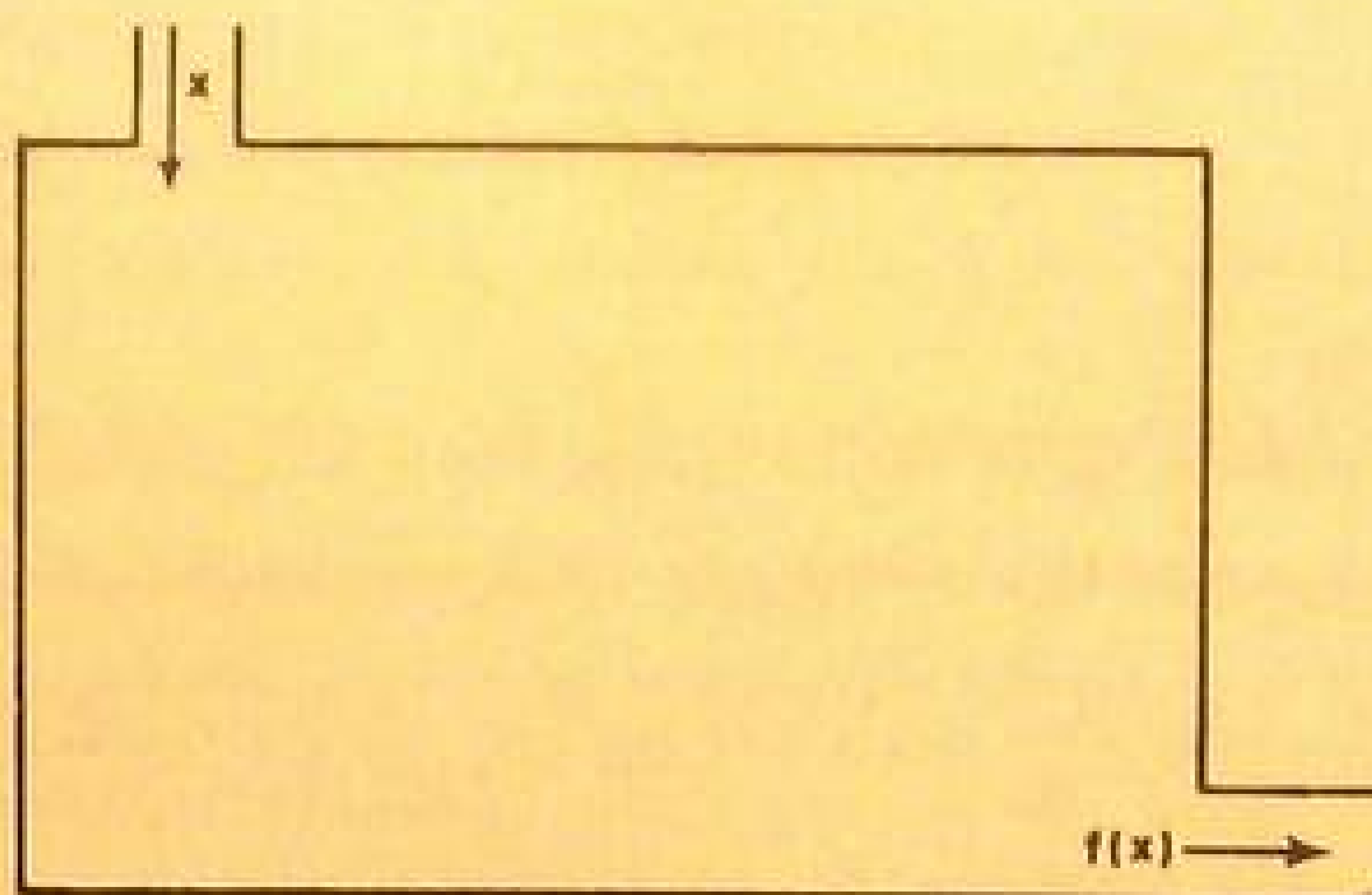
مثال ۶ ــ دامنهٔ تعریف تابع f را که به وسیلهٔ $x \longmapsto \frac{x}{x-2}$ مشخص شده است تعیین کنید.

جواب ــ دامنه تعریف تابع چنین است: $D_f = R - \{2\}$

در این کتاب معمولا بجای «تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$» عبارت «تابع $y=f(x)$» بکار رفته است.

تعبیر تابع به عنوان یك ماشین

تابع را می‌توان به عنوان یك ماشین پنداشت که اگر عضوی از دامنه به‌آن خورانده شود محصولی که همان مقدار تابع در ازای آن عضو است، نتیجه دهد. در شکل زیر f به منزلهٔ کلیهٔ اعمالی است که روی x انجام می‌شود تا $f(x)$ به‌دست آید.



مثلا در مورد تابع مثال ۵ یعنی $f(x)=\sqrt{x-1}$ می‌توان گفت: وقتی عدد x ازفاصلهٔ $[1, +\infty)$ به‌ماشین f داده شود، ابتدا f عدد یك را از آن کم می‌کند و سپس جذر مثبت آن را می‌گیرد و محصول این عملیات همان $f(x)=\sqrt{x-1}$ است.

اکثر توابعی که از این پس با آنها سروکار خواهیم داشت توابع حقیقی خواهند بود.

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند و می‌نویسند $f=g$ اگر و تنها اگر دامنه‌هایشان مساوی بوده و برای هر $x \in D_f = D_g$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$. مثلا دو تابع حقیقی f و g که به‌صورت:

$$f(x)=|x| \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt{x^2}$$

تعریف شده‌اند با هم برابرند ولی توابع حقیقی h و k که بصورت

$$h(x)=\frac{x^{2}-x}{x} \quad \text{و} \quad k(x)=x-1$$

تعریف شده‌اند با هم مساوی نیستند زیرا صفر در دامنهٔ k قرار دارد در حالی که متعلق به دامنهٔ h نیست. البته اگر دامنهٔ k را همهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر فرض کنیم، آن وقت $k=h$.

تبصره ــ حتماً تاکنون توجه کرده‌اید که تابع با عوض کردن نام متغیر عوض نمی‌شود. مثلا توابع f، g و h که بوسیله دستورهای:

$$f(x)=x^{2} \quad , \quad x\in[0,1]$$
$$g(y)=y^{2} \quad , \quad y\in[0,1]$$
$$h(t)=t^{2} \quad , \quad t\in[0,1]$$

نوشته شده‌اند همگی یك تابع را مشخص می کنند.

مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع

فرض کنید f و g توابعی حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند. به کمك آنها می‌توان توابع جدیدی که با $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ نشان داده می‌شوند ساخت که آنها را به ترتیب مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت f و g می‌نامند. دامنهٔ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ اشتراك دامنه‌های f و g یعنی $D_f\cap D_g$ است و دامنه $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$D_f\cap D_g-\{x\in D_g|g(x)=0\}$$

این توابع توسط دستورهای زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad \forall x\in D_f\cap D_g$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \qquad \forall x\in D_f\cap D_g$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \qquad \forall x\in D_f\cap D_g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x\in D_f\cap D_g-\{t\in D_g|g(t)=0\}.$$

مثال ــ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x-2}$. همانطور که قبلا گفتیم وقتی دامنهٔ تابع را مشخص نمی کنیم منظور این است که آن را بزرگترین مجموعهٔ ممکن گرفته‌ایم پس:

$$D_f=\{x|x-1\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 1\}=[1,+\infty[$$
$$D_g=\{x|x-2\neq 0\}=\{x|x\neq 2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$$

بنابراین دامنهٔ تعریف $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ عبارتست از:

$$D_f\cap D_g=[1,\ 2[\cup]2,\ +\infty[$$

و دامنهٔ تعریف $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_f\cap D_g-\{x\in D_g|g(x)=0\}=[1,\ 2[\cup]2,\ +\infty]-\{1\}=$$
$$]1,\ 2[\cup]2,\ +\infty[$$

در نتیجه:

$$(f\pm g)(x)=\sqrt{x-1}\pm\frac{x-1}{x-2},\ x\in[1,\ 2[\cup]2,\ +\infty[$$

$$(f\cdot g)\ (x)=\sqrt{x-1}\quad\frac{x-1}{x-2},\ x\in[1,\ 2[\cup]2,\ +\infty[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\ x\in]1,2[\cup]2,+\infty[$$

ترکیب دو تابع

اکنون به تعریف ترکیب دو تابع و ذکر مثالی ساده از آن می‌پردازیم

فرض کنید f و g توابعی با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g باشند منظور از ترکیب f و g که آن را با $f\circ g$ (بخوانید: اف اُ جی) نشان می‌دهند تابعی است که دامنهٔ آن:

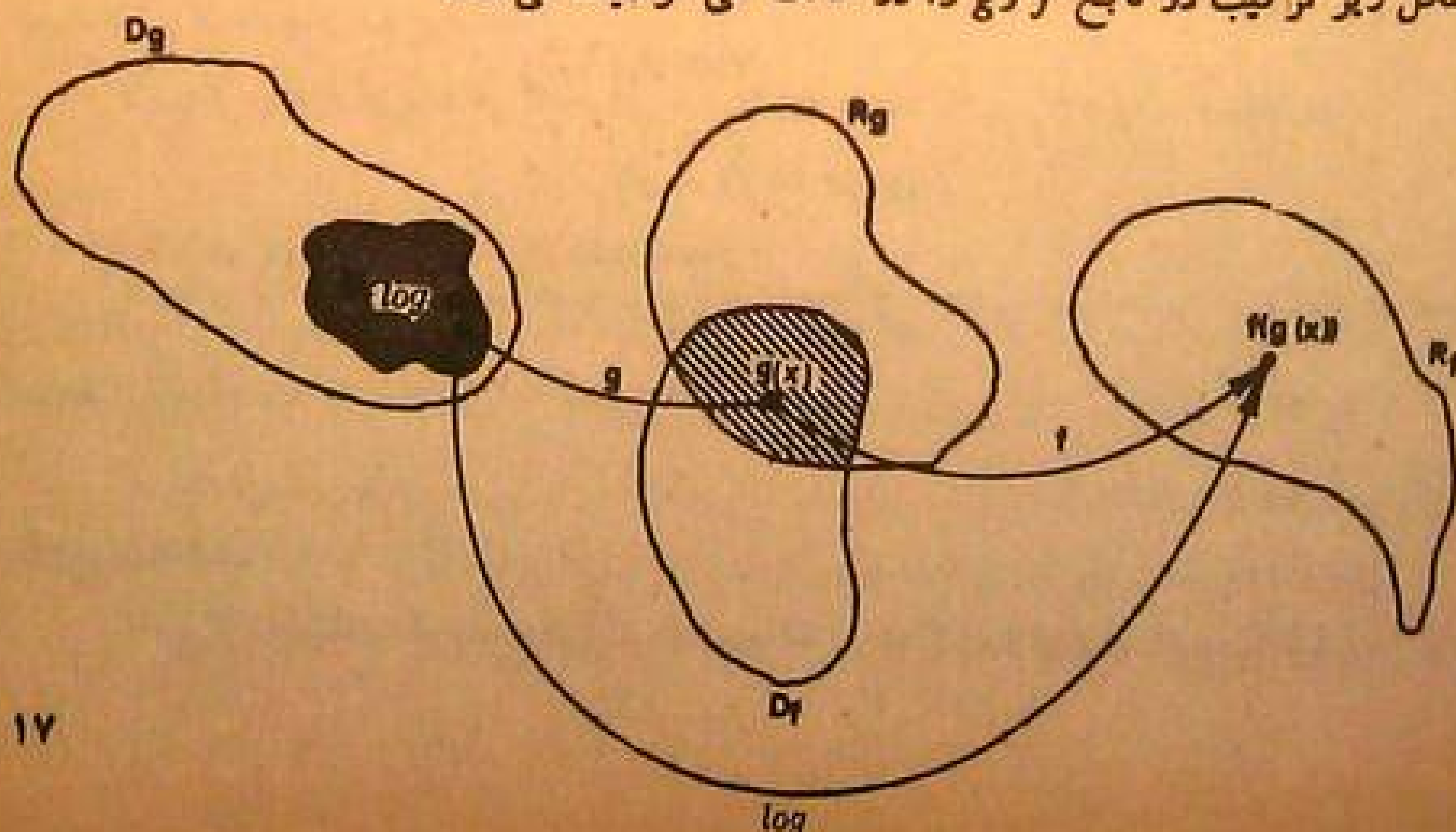
$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\ x\in D_{f\circ g}$$

هرگاه تابعی برابر ترکیب دو تابع باشد آن را تابع مرکب یا تابع تابع نیز می‌نامند.

شکل زیر ترکیب دو تابع f و g را در حالت کلی توصیف می‌کند:



مثال - توابع f و g را که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ و } g(x)=1-x$$

داریم:

$$D_f=[0,+\infty[\quad \text{و} \quad D_g=]-\infty,+\infty[$$
$$R_f=[0,+\infty[\quad \text{و} \quad R_g=]-\infty,+\infty[$$

بنابراین:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\in R | 1-x\geqslant 0\}=(-\infty,1]$$
$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{x\in[0,+\infty) | \sqrt{x}\in R\}=[0,+\infty)$$

و همچنین:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1-x)=\sqrt{1-x} \quad \forall x\in(-\infty,1]$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x} \quad \forall x\in[0,+\infty)$$

توجه: از این مثال دیده میشود که در حالت کلی لازم نیست داشته باشیم $f\circ g=g\circ f$. در این مثال نه تنها دامنه‌های $f\circ g$ و $g\circ f$ برابر نیستند، بلکه حتی مقادیر $f\circ g$ و $g\circ f$ روی مقطع دامنه‌هایشان یعنی $[0,1]$ نیزمساوی نیستند. این نشان میدهد که عمل ترکیب دو تابع روی مجموعهٔ توابع یك عمل جابجائی نیست.

تابع زوج و تابع فرد

تابع f را زوج گویند، هرگاه اولاً برای هر $x\in D_f$ داشته‌باشیم $-x\in D_f$؛ ثانیاً برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x)=f(-x)$$

تابعهائی که بوسیلهٔ دستورهای $y=x^2-1$ و $y=\cos x$ و $y=x\cdot\sin x$ تعریف شده‌اند، نمونه‌هائی از تابعهای زوج هستند.

تابع f را فردگویند، هرگاه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-x\in D_f$ و بعلاوه:

$$f(x)=-f(-x)$$

تابعهای $y=x^3-x$ ، $y=x+\sin x$ و $y=\frac{x}{x^2+1}$، نمونه‌هایی از تابعهای فرد هستند.

تابع متناوب

تابع f را متناوب گویند، وقتی که عددی مانند $T\neq 0$ وجودداشته باشد، به‌قسمی که‌برای

هر x متعلق به دامنهٔ f عدد $x+T$ نیز متعلق به دامنهٔ f بوده و بعلاوه داشته باشیم:

$$f(x+T)=f(x)$$

عدد T را یک دورهٔ تناوب تابع گویند . روشن است که اگر T یک دورهٔ تناوب باشد ، همه عددهای به‌صورت kT (k عددی است درست و مخالف صفر) ، نیز دورهٔ تناوب تابع f خواهند بود .

معمولا بین همهٔ دوره‌های تناوب ، یکی وجود دارد که از بقیه از لحاظ قدر مطلق کوچکتر است . وقتی که از دورهٔ تناوب یک تابع نام می‌برند ، منظور کوچکترین مقدار مثبت T می‌باشد .

تابع $f(x)=\sin x$ دارای دورهٔ تناوبی برابر با 2π است، زیرا داریم:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

و بطور کلی:

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x$$

تمرین

۱ــ آیا مجموعهٔ زیر تابعی را نمایش می‌دهد یا خیر:

$$f=\{(1,2)\ و\ (3,5)\ و\ (4,2)\ و\ (1,5)\}$$

۲ــ در رابطهٔ زیر اصلاحی بکنید تا تابعی را نمایش بدهد

$$f:x\longmapsto y=\pm\sqrt{x}$$

۳ــ رابطه زیر داده شده است با چه تغییری می‌توانیدآنرا تابع کنید

$$f=\{(1,2)\ و\ (2,3)\ و\ (3,4)\ و\ (2,4)\}$$

۴ــ تابع f بشکل زیر داده شده است:

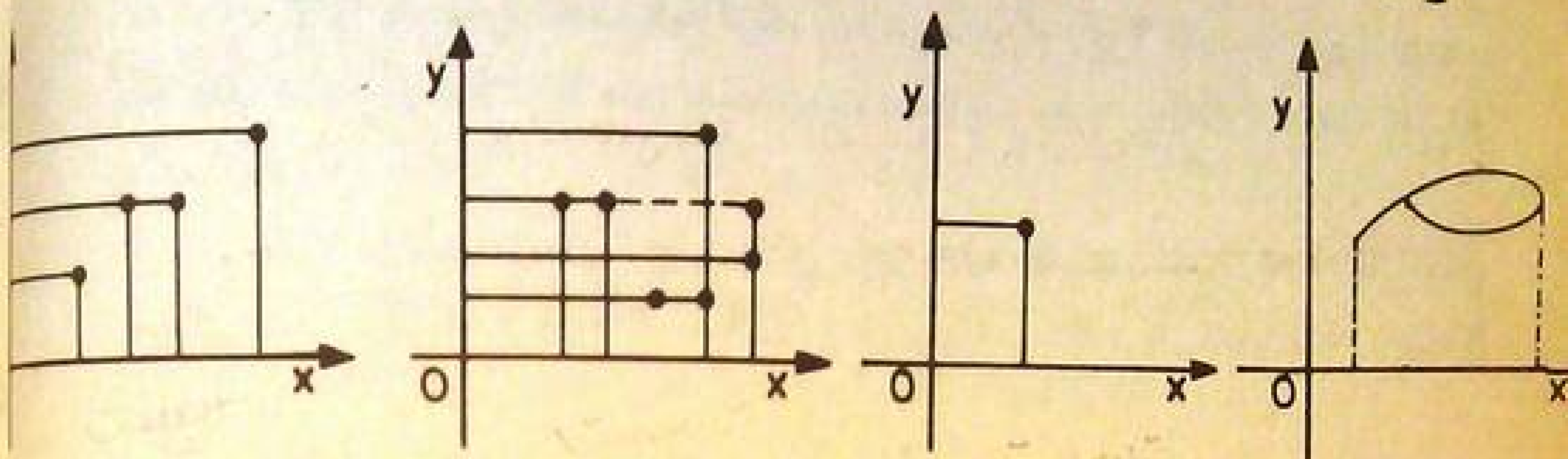
$$f=\{(x,y)|x\in N\ و\ x<6\ و\ y=x^2\}$$

N مجموعهٔ اعداد طبیعی‌است. تابع f را به‌شکل زوجهای مرتب‌بنویسید (نمایش تفصیلی).

۵ــ تابعی بشکل $f=\{(1,2)\ و\ (2,3)\ و\ (3,4)\ و\ (4,5)\}$ داده‌شده است. ضابطهٔ $y=f(x)$ آنرا مشخص کنید.

۶ــ تابعی بشکل $f=\{(1,2)\ و\ (2,3)\ و\ (3,4)\ و\ (4,1)\}$ داده شده است. قانون $y=f(x)$ آنرا معلوم کنید.

۷ـ اشکال زیر نمودار روابطی هستند. مشخص کنید کدامیک از آنها تابع است و کدامیک تابع نیست.



۸ـ هر خط موازی با محور Oy نمودار یک تابع را حداکثر در چند نقطه قطع می‌کند؟ (x متغیر مستقل است).

۹ـ هر خط موازی با محور Ox نمودار یک تابع را حداکثر در چند نقطه قطع می‌کند؟ (y متغیر مستقل است).

۱۰ـ هر خط موازی با محور Oy نمودار یک تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (y متغیر مستقل است).

۱۱ـ هر خط موازی با محور Ox نمودار یک تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (x متغیر مستقل است).

دامنهٔ تعریف هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

۱۲ـ $f : x \mapsto x^2 + 5x + 1$

۱۳ـ $f : x \mapsto \sqrt{\cos^2 x + \cos x}$

۱۴ـ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-2}$

۱۵ـ $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

۱۶ـ $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x-|x|}}$

۱۷ـ $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x^2-3x-5}{x-1}}$

۱۸ـ هرگاه توابع حقیقی f و g به این ترتیب تعریف شده باشند:

$$f(x) = \cos^2 x \quad , \quad g(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

اولاً دامنهٔ تعریف و برد هر کدام از این دو تابع را معین کنید.

ثانیاً دامنهٔ تعریف تابع مرکب $g\circ f$ را تعیین کرده و $(g\circ f)(x)$ را بدست آورید.

ثالثاً تابعهای $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین کرده و دامنهٔ هریک ازآنها را بدست آورید.

۱۹- هرگاه f و g، دو تابع حقیقی باشند که به ترتیب با رابطه‌های

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}},\ g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$$

تعریف شده باشند:

اولاً دامنهٔ تعریف و برد هرکدام از این دو تابع را پیدا کنید.

ثانیاً دامنه‌های تابع‌های $f\circ g$ و $g\circ f$ را بدست آورده و $g(f(x))$ را محاسبه کنید.

ثالثاً تابعهای $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ و $\frac{g}{f}$ را تعیین کـرده و دامنهٔ هر یـک از آنها را بیابید.

۲۰- تابع f با رابطهٔ:

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{4}$$

تعریف شده است. دامنهٔ تعریف و برد آن را به دست آورید.

۲۱- تابع $f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$ را در نظر بگیرید: $a>0$ و $a\neq 1$ و $x\neq 1$

اولاً دامنهٔ تعریف و برد آن را پیدا کنید.

ثانیاً بگویید که چرا این تابع، فرد است؟

۲۲- اگر داشته باشیم: $f(1+x)=x^2$، $f(x)$ را پیدا کنید.

۲۳- با شرط $f(2+x)=x^2+1$، $f(2-x)$ را پیدا کنید.

۲۴- $f(x)=\frac{1}{x^2}$، $x\neq 0$، $g(f(x))=x^2$ مطلوب است $g(x)$.

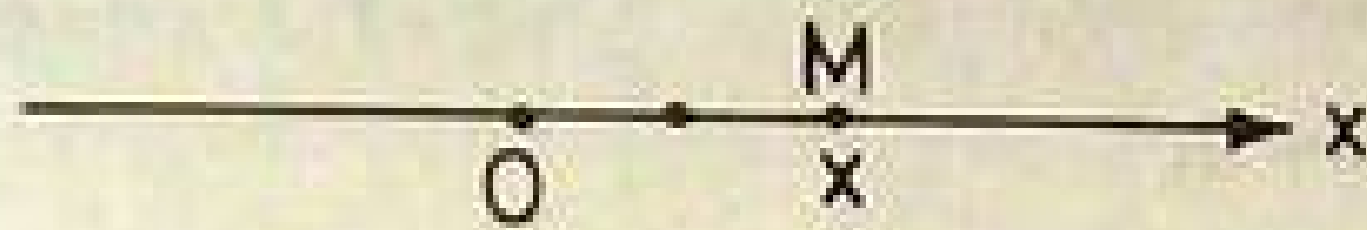
۲۵- با شرط $f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{1+x^2}$ و $x\neq 0$، مطلوب است $f(x)$.

۲۶- باشرط $f(x)=Arccos(\log x)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$، مطلوب است $f(g(10))$.

قدرمطلق

وقتی گفته می‌شود نقطهٔ M به طول x را روی محور طول‌ها در نظر بگیرید برحسب اینکه

x مثبت یا منفی باشد M را در طرف راست یا در طرف چپ مبداء می گیرید





باید توجه داشت که در هردو حالت بدون در نظر گرفتن جهت، فاصلهٔ نقطهٔ M از O یعنی OM مثبت است این فاصله‌را به‌صورت:

$$OM = |x|$$

نمایش داده می‌خوانیم فاصلهٔ نقطهٔ O تا M برابر قدرمطلق x است پس $|x|$ همیشه مثبت میباشد مگر آنکه M بر O منطبق باشد که دراینصورت $|x|$ برابر صفر خواهد بود.

درزیر فاصلهٔ نقطهٔ M تا O برابر $|۲|$ است.



$$OM = |۲|$$

بنابراین:

$$|۲| = ۲ \text{ ، } |-۵| = ۵ \text{، } \left|-\frac{۱}{۳}\right| = \frac{۱}{۳}$$

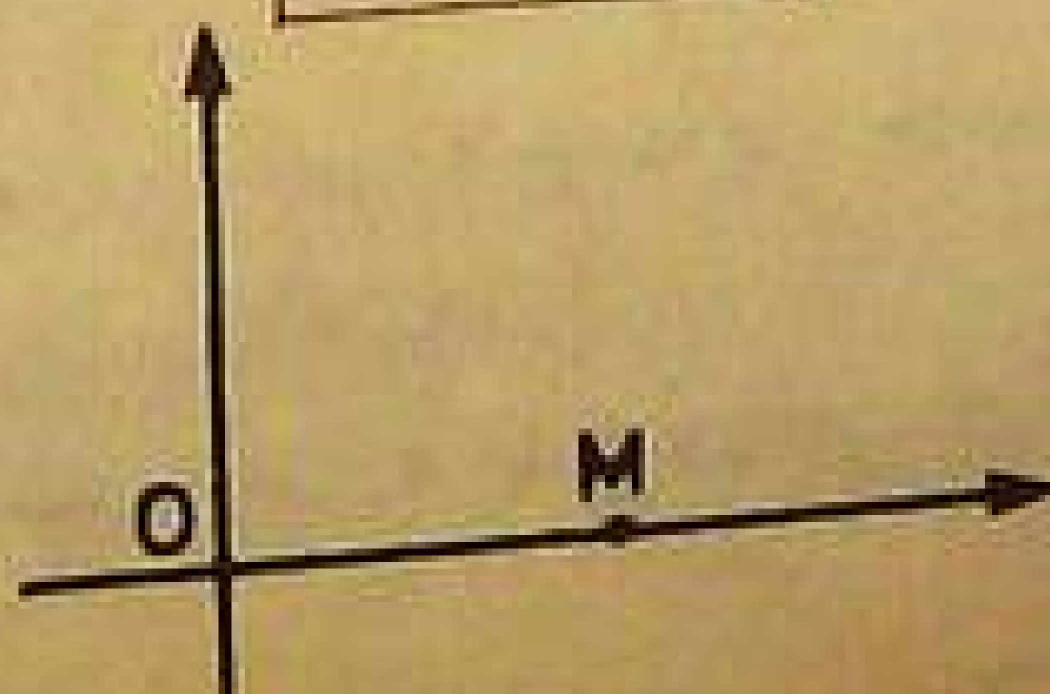
گاهی اوقات $|x|$ را اندازهٔ x نیز می گویند. مثلا اندازهٔ $|-۷|$ برابر ۷ است.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, ۰)$ را تا مبداء از دستور $OM = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ بدست آوریم نتیجه می‌شود:

$$OM = \sqrt{x^۲}$$

و بنابراین:

$$\boxed{\sqrt{x^۲} = |x|}$$



از نظر تابعی، $|x|$ به‌هر عدد حقیقی یکعدد نامنفی نسبت می‌دهد بنابراین آنرا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R \longrightarrow R^{\geq 0}$$

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

چند نکته - اگر نقطهٔ M به‌طول x سمت راست ویامنطبق بر O باشد $\overline{OM} = x$ مثبت یا صفر بوده داریم:

$OM = \overline{OM}$

$|x| = x \qquad x \geqslant 0$

و اگر نقطهٔ M به‌طول x سمت چپ O باشد $\overline{OM} = x$ منفی بوده وداریم:

$OM = -\overline{OM}$

$|x| = -x \qquad x < 0$

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود:

۱- برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$|x| = |-x|$$

مثال - $|۲| = |-۲|$ و $|a-b| = |b-a|$

-۲

الف- $x = y \Longrightarrow |x| = |y|$

ب- $|x| = |y| \Longleftrightarrow x = \pm y$

ج- $|x| = a \Longleftrightarrow x = \pm a \qquad (a > ۰)$

یعنی از $x = y$ می‌توان نتیجه گرفت $|x| = |y|$ ولی عکس آن همواره درست نیست

باید توجه داشت که $|x| = -۲$ بی‌معنی است. چرا؟

مثال -

$$|x| = ۴ \Longrightarrow x = \pm ۴$$

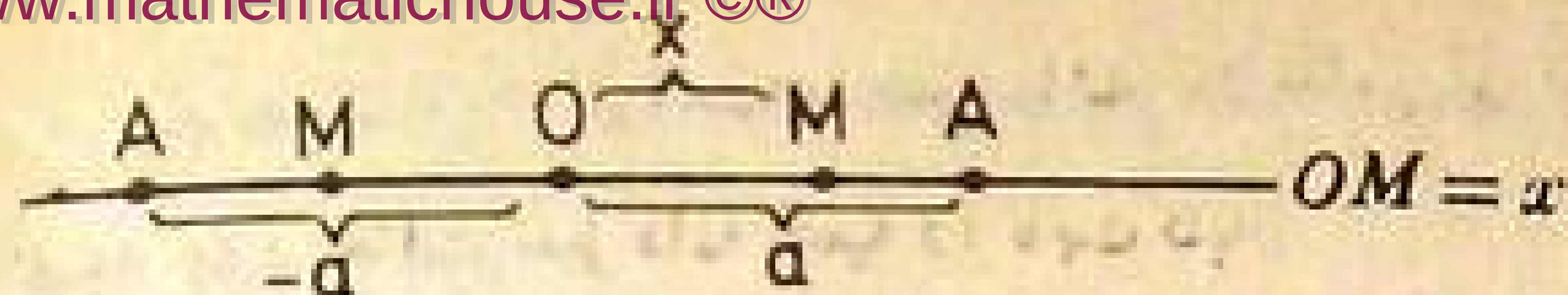
۳- گزاره‌های $|x| = |y|$ و $x^۲ = y^۲$ هم‌ارزند

$$x^۲ = ۲ \Longrightarrow x = \pm ۲ , \text{ و } |x| = ۲ \Longrightarrow x = \pm ۲$$

۴- برای هر x داریم: $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

۵- نقطهٔ متغیر M به طول x بین دو نقطهٔ ثابت به طولهای a و $-a$ حرکت می‌کند

بنابراین داریم:



$$-a<x<a$$

اما از $OM<OA$ نتیجه می‌شود

$|x|<a$ پس:

$$\boxed{|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a}$$

۶- گزاره‌های $|x|<a$ و $x^2<a^2$ و $-a<x<a$ هم‌ارزند.

۷- اگر $|x|>a$ و $a>0$ داریم $x>a$ یا $x<-a$

قضیه ۱- برای هر x و y داریم: (نامساوی مثلثی)

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \qquad (1)$$

طبق ۲ داریم:

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x| \qquad (2)$$

$$-|y|\leqslant y\leqslant|y| \qquad (3)$$

از جمع (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$$

طبق ۵ می‌شود:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

قضیه فوق قابل تعمیم است:

$$|x+y+z+\cdots+t|\leqslant|x|+|y|+|z|\cdots+|t|$$

قضیهٔ ۲- برای هر x و y داریم:

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|$$

هرگاه در (۱) x را به $y-x$ تبدیل کنیم می‌شود:

$$|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|$$
$$|x|\leqslant|x-y|+|y|$$
$$|x|-|y|\leqslant|x-y|$$

قضیهٔ ۳- برای هر x و y داریم:

$$|xy|=|x|\cdot|y|$$

برحسب آنکه x مثبت یا منفی باشد. در مقابل آن y نیز ممکن‌است مثبت یا منفی باشد در نتیجه چهار حالت تمیز داده قضیه را ثابت کنید.

قضیهٔ ۲ـ برای هر x و y داریم:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad (y \neq 0)$$

هر گاه $t=\frac{x}{y}$ بگیریم داریم:

$$x = ty$$

$$|x| = |t|\cdot|y| \Rightarrow |t| = \frac{|x|}{|y|} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

مثال ۱ - $\frac{-2}{\sqrt{1+\sin x}}$ را به‌صورت قدرمطلق نشان دهید. $\left(x \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ و } k \in Z\right)$

$$\frac{-2}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{-2}{\sqrt{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} = \frac{-2}{\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{-2}{\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|} =$$

$$-\left|\frac{2}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right|$$

مثال ۲ - $|x-5| \leqslant 2$ را به‌صورت نامساوی‌های مضاعف بنویسید.

$$|x-5| \leqslant 2 \Rightarrow -2 \leqslant x-5 \leqslant 2$$

$$\Rightarrow 3 \leqslant x \leqslant 7$$

مثال ۳ - نامساوی $2 \leqslant x \leqslant 4$ را به‌صورت قدرمطلق نشان دهید.

از طرفین نامساوی ۳ راکم می‌کنیم. (۳ میانگین حسابی بین ۲ و ۴ است)

$$-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$$

$$|x-3| \leqslant 1$$

معادلات و نامعادلات شامل قدرمطلق

به‌طور کلی در حل معادلات و نامعادلاتی که شامل قدرمطلق هستند بااستفاده ازتعریف قدرمطلق وتتایج مربوط و یا تعیین علامت‌عبارات داده شده را بمعادلات و نامعادلات معمولی تبدیل کرده آنها را حل می‌کنیم.

مثال ۱ - معادله $|x-5| = 7$ را حل کنید

حل - $|x-5|=7 \Rightarrow x-5=\pm 7$

$\begin{cases} x=-2 \\ x<5 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x=12 \\ x>5 \end{cases}$

مثال ۲ - مطلوبست حل معادلهٔ $3|x-1|-2|x|=5$

حل - x و $x-1$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$

حال با توجه به‌جدول و تعریف قدرمطلق، عبارات $|x-1|$ و $|x|$ را به صورت معمولی می‌نویسیم

$x<0$ $\quad (3|x-1|-2|x|=5)=(3(1-x)-2(-x)=5)$

$\Rightarrow 3-3x+2x=5$

$\Rightarrow x=-2$ قابل قبول

$0\leqslant x<1$ $\quad (3|x-1|-2|x|=5)=(3-3x-2x=5)$

$\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$ غیرقابل قبول

$1\leqslant x$ $\quad (3|x-1|-2|x|=5)=(3x-3-2x=5)$

$\Rightarrow x=8$ قابل قبول

مثال ۳ - مطلوبست حل نامعادله $|x-1|<3$

حل - داریم $-3<x-1<3$ و یا $-2<x<4$

مثال ۴ - مطلوبست حل نامعادله

$$|x-2|+3|x+3|+|x|<13$$

حل - عبارت‌های $x-2$ و $x+3$ و x را تعیین علامت می‌کنیم

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$

طبق جدول داریم:

$x<-3 \Rightarrow -x+2-3x-9-x<13 \Rightarrow -5x<20$

$x>-4$ یا $-4<x<-3$

$-3\leqslant x<0 \quad -x+2+3x+9-x<13$ ، $x<2$ ، $-3\leqslant x<0$

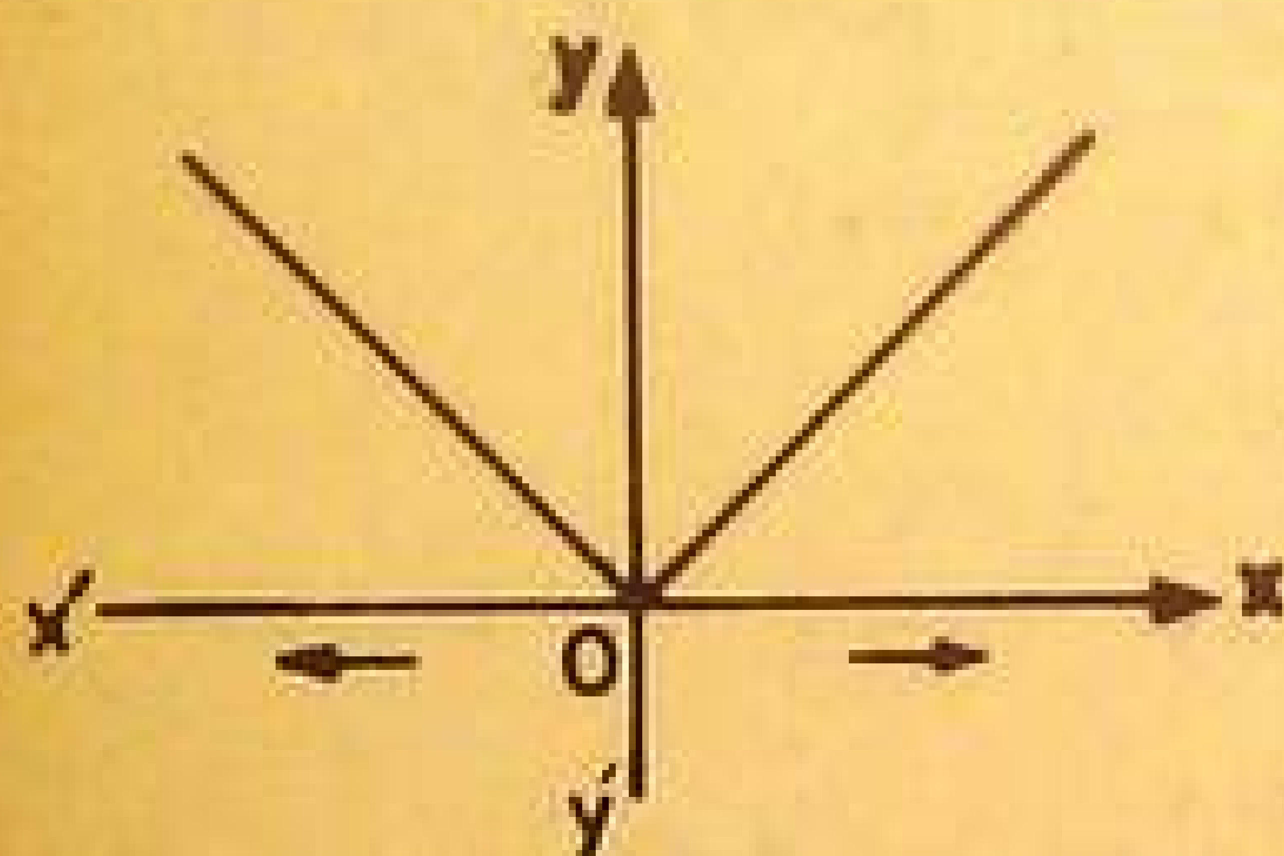
$0\leqslant x<2 \quad -x+2+3x+9+x<13$ ، $3x<2$ ، $x<\frac{2}{3}$ ، $0<x<\frac{2}{3}$

$2\leqslant x \quad x-2+3x+9+x<13 \quad 5x<6$ ، $x<\frac{6}{5}$ غیرقابل قبول

رسم توابع خطی شامل قدر مطلق

این توابع معمولاً از دو نیم خط یا دو خط یا بیشتر تشکیل شده‌اند.

برای رسم آنها ابتدا عبارات شامل قدرمطلق را با استفاده از تعریف قدر مطلق و نتایج مربوط و یا تعیین علامت به صورت عبارات معمولی نوشته سپس در فاصله‌های به‌دست آمده نیم‌خط‌ها را رسم می‌کنیم.



مثال ۱ - مطلوبست رسم نمودار $y=|x|$

دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی است و داریم

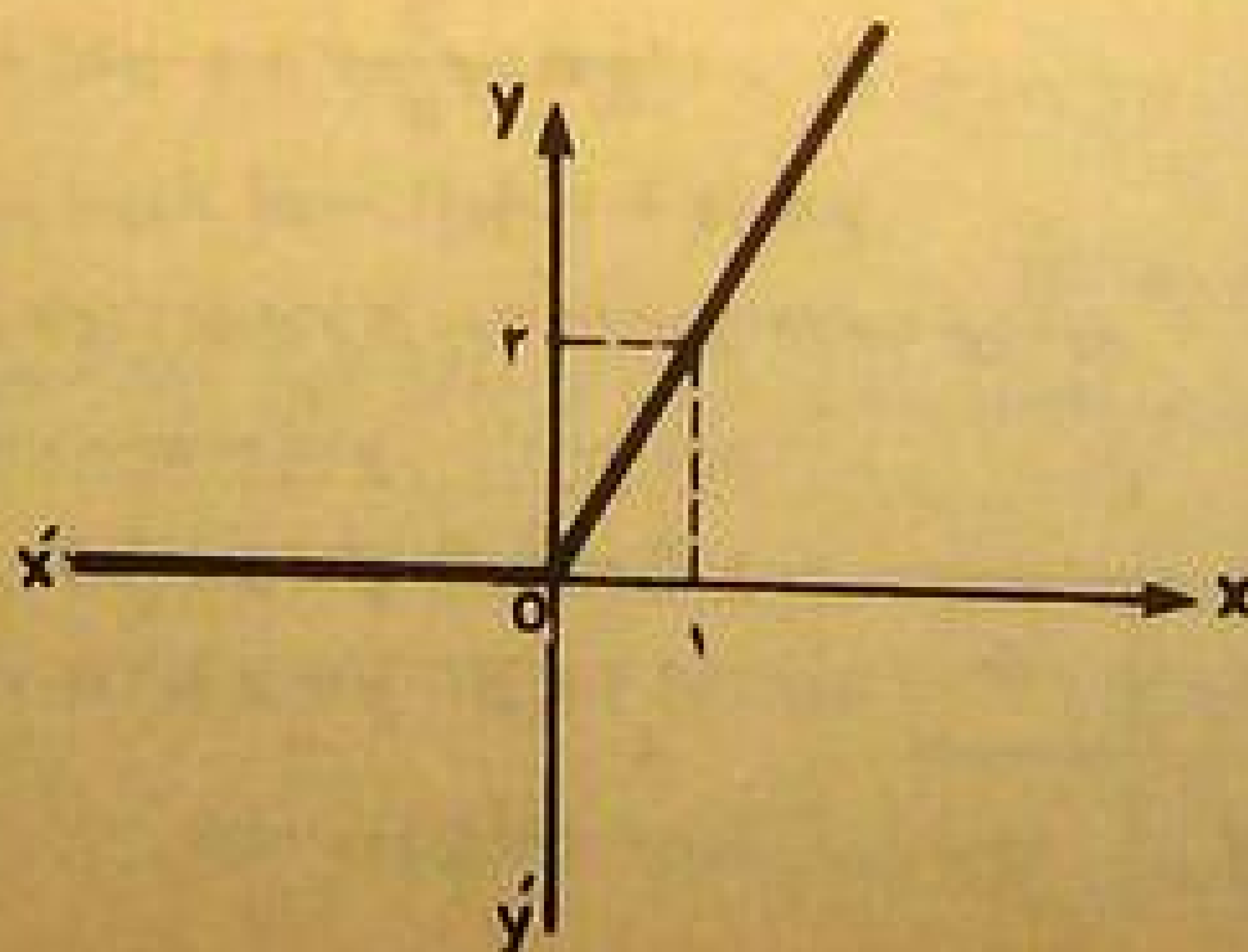
$$y=x \qquad x\geqslant 0$$

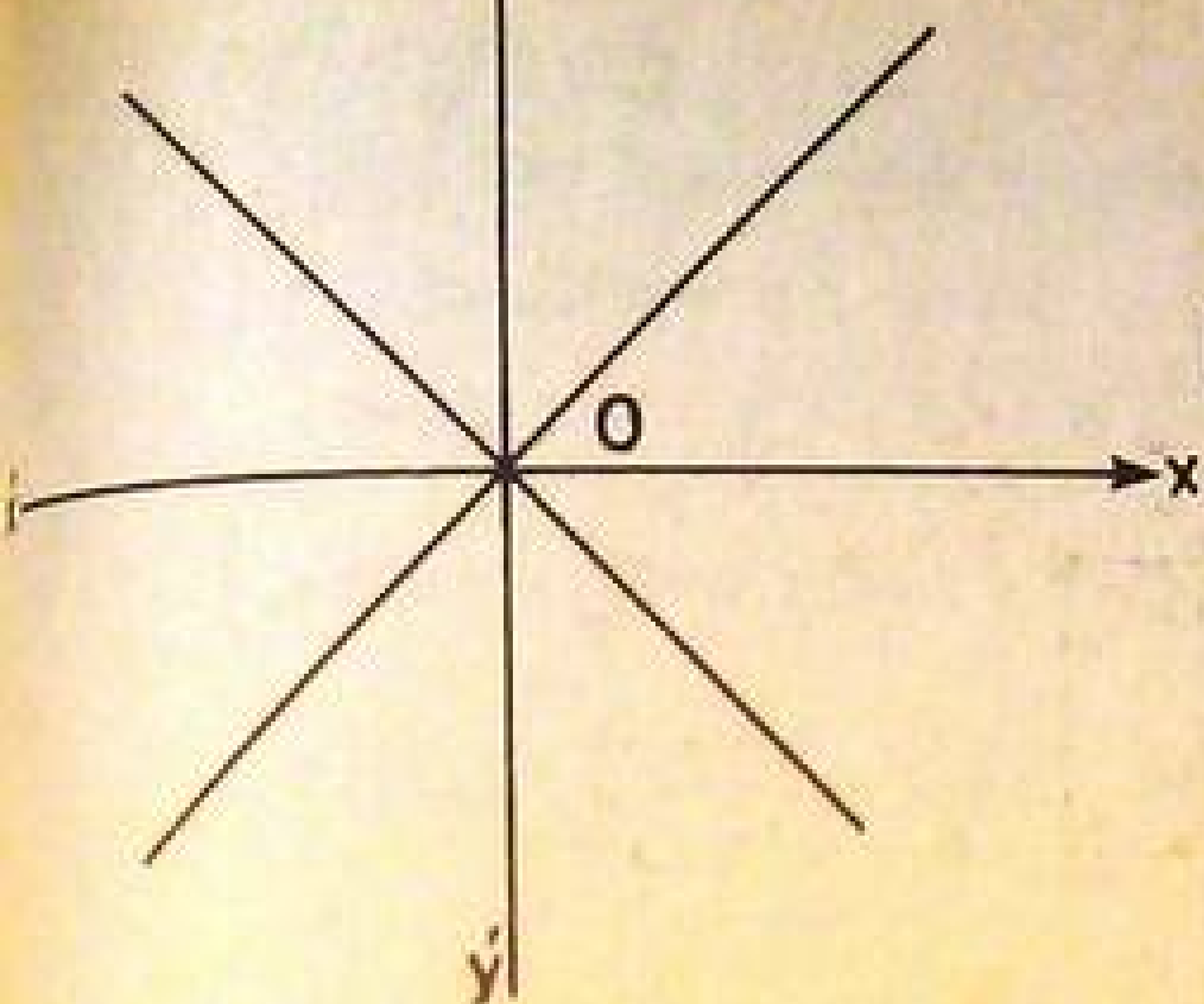
$$y=-x \qquad x\leqslant 0$$

مثال ۲ - مطلوبست رسم نمودار $y=|x|+x$

حل - داریم:

$$\begin{cases} y=x+x=2x & x\geqslant 0 \\ y=-x+x=0 & x\leqslant 0 \end{cases}$$



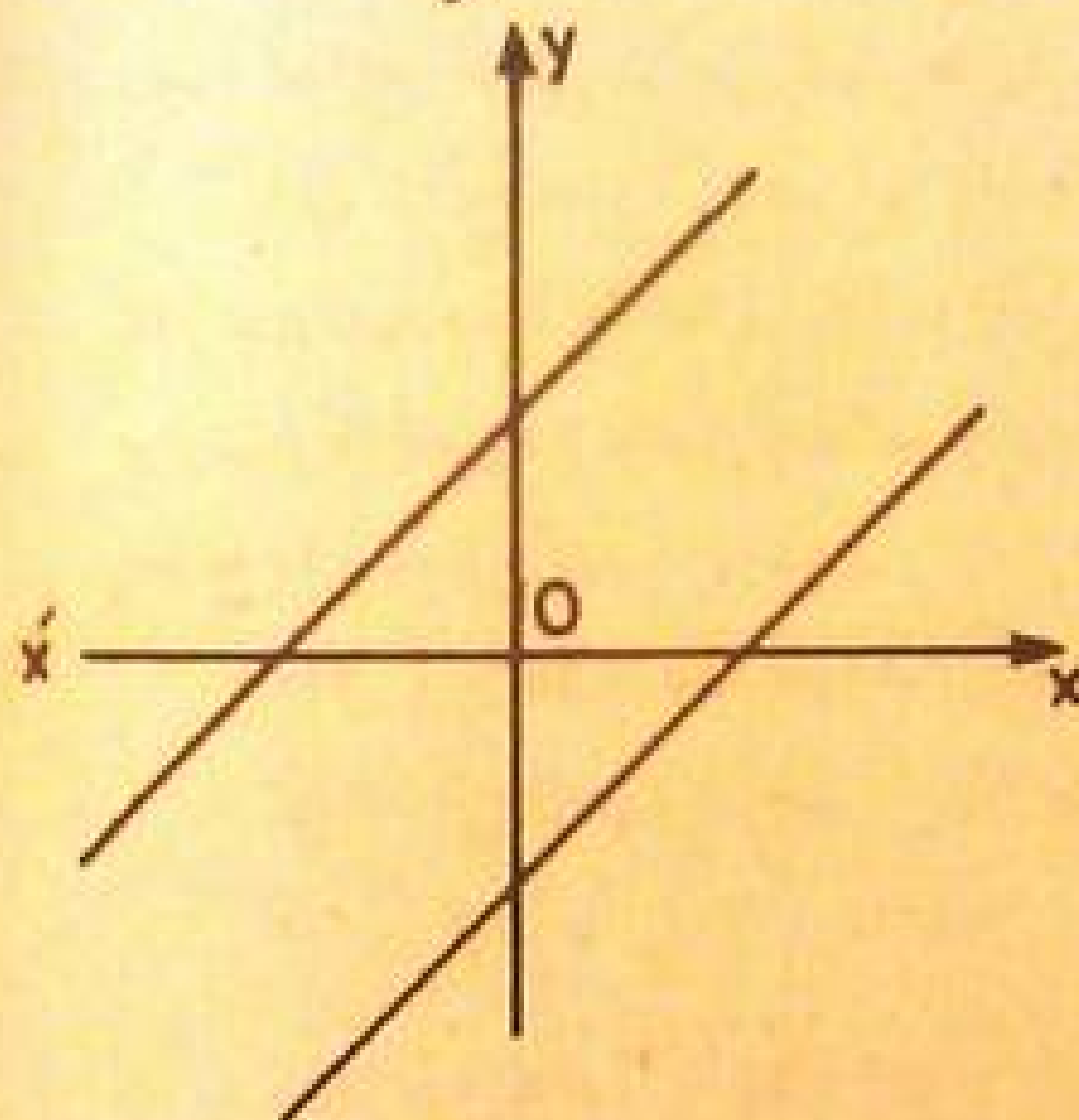


مثال ۳ - رسم نمودار $|y|=|x|$

حل - داریم $y=\pm x$. و نمودار آن

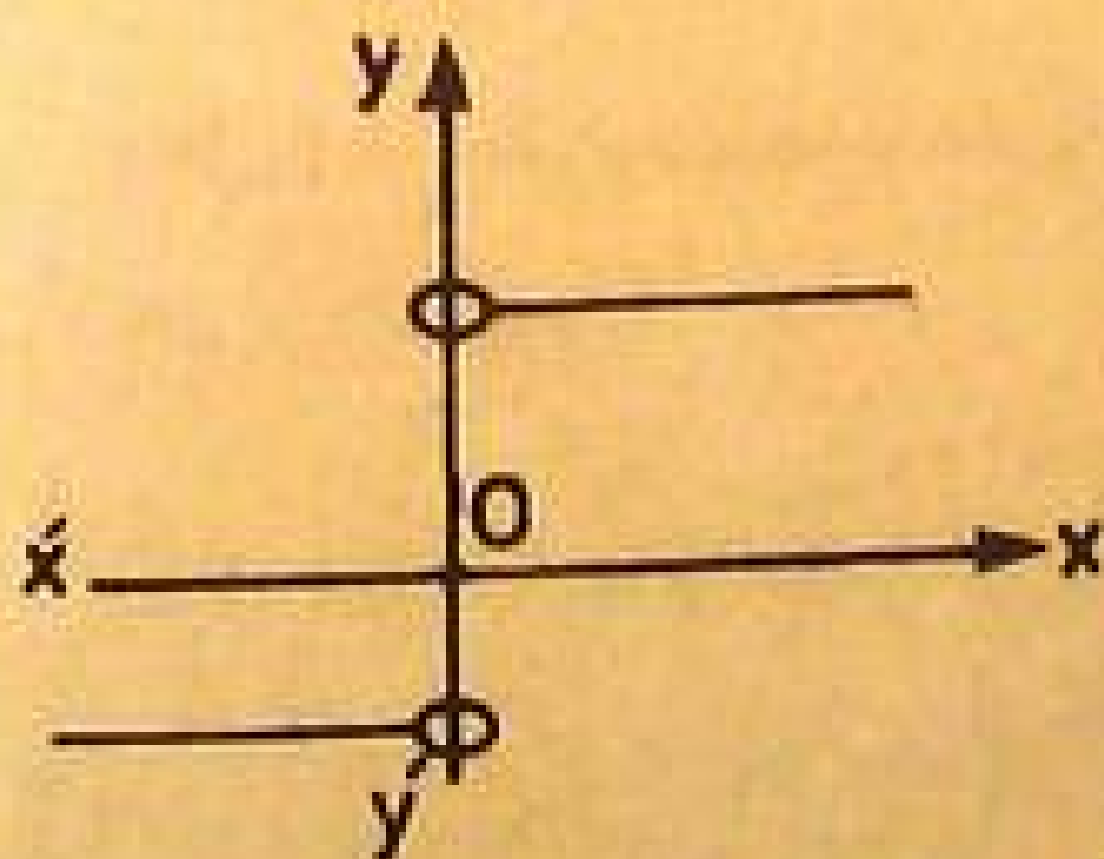
به‌صورت روبه‌رو است (توجه کنید که $|y|=|x|$

ضابطه تابع نیست)



مثال ۴ - رسم نمودار $|x-y|=1$

حل - داریم $x-y=\pm 1$ و یا $y=x\pm 1$



مثال ۵ - رسم نمودار $y=\frac{|x|}{x}$

حل - دامنه تابع $R-\{0\}$ است و داریم

$$y=\frac{x}{x}=1 \qquad x>0$$

$$y=-\frac{x}{x}=-1 \quad x<0$$

مثال ۶ - رسم نمودار $y=|x+1|+|1-x|$

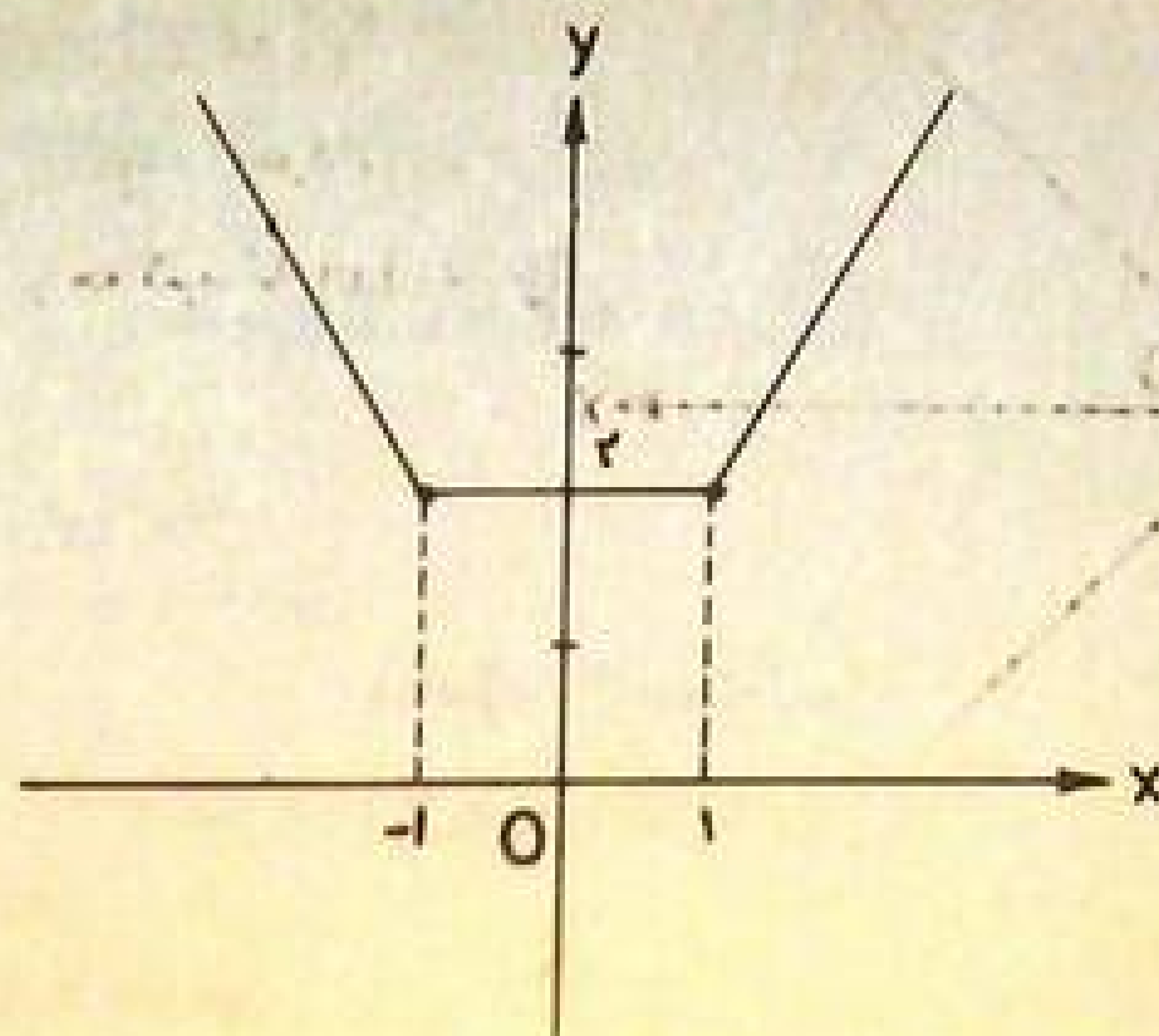
حل - عبارت‌های $x+1$ و $1-x$ را تعیین علامت می کنیم

$x\leqslant -1 \quad y=-x-1+1-x=-2x$

$-1\leqslant x\leqslant 1 \quad y=x+1+1-x=2$

$1\leqslant x \quad y=x+1-1+x=2x$

x		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$



تابع جزء صحیح

هر عدد حقیقی را می‌توان مجموع یکعدد درست n و یکعدد حقیقی مثبت p که بین صفر و یک می‌باشد فرض گرفت (در حالت خاص ممکن است p مساوی صفر باشد)

مثلا در عدد ۲/۷۵ داریم $n=۲$ و $p=۰/۷۵$

و در عدد ۲/۳ — داریم $n=-۳$ و $p=۰/۷$

و در عدد $۵\frac{۲}{۳}$ داریم $n=۵$ و $p=\frac{۲}{۳}$

بطور کلی برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$(۱)\quad x=n+p \qquad ۰\leqslant p<۱,\ n\in Z$$

n را جزء صحیح x نامیده و آن را با نماد $[x]$ یا $E(x)$ نمایش می‌دهند با توجه به (۱) داریم:

$$x=[x]+p \qquad n\leqslant x<n+۱$$

و یا

$$p=x-[x] \qquad ۰\leqslant p<۱$$

p را قسمت کسری x می‌خوانند.

از نظر تابعی، $[x]$ را به‌صورت زیر تعریف کرده آنرا تابع جزء صحیح می‌خوانند.

$$e: R\longrightarrow Z$$

$$x\longmapsto [x]=n \qquad n\leqslant x<n+۱$$

نمودار $[x]$ ازپاره خطهای موازی محور طولها تشکیل شده است.

تابع به‌دست آمده از تعریف عبارتست:

۱ــ برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$[x]=n \Leftrightarrow n\leqslant x<n+۱$$

۲ــ از(۱) حاصل می‌شود:

$$[x]\leqslant x<[x]+۱$$

مثلا $$[۲/۵]\leqslant ۲/۵<[۲/۵]+۱$$

۳ــ برای هر $n_۱\in Z$ داریم:

$$[x+n_۱]=[x]+n_۱$$

مثلا

$$[x+۲]=[x]+۲$$

$$-۳+[x]=[-۳+x]$$

بخصوص داریم:

$$[x+۱]=[x]+۱$$

بـرای رسم نمودار $[x]$ کافی است طبق قانون رسم توابع خطی $[x]$ را درفاصله [۰ , ۱) رسم کرده، برای تعیین مقدار تابع درفاصلهٔ بعدی [۱ , ۲) به‌مقدار تابع یك واحد اضافه‌کنیم و به همین ترتیب ادامه دهیم.

تابع پله‌ای (تابع جزء صحیح) عملا در زندگی روزمره بکار گرفته می‌شود به‌مثال زیرتوجه کنید:

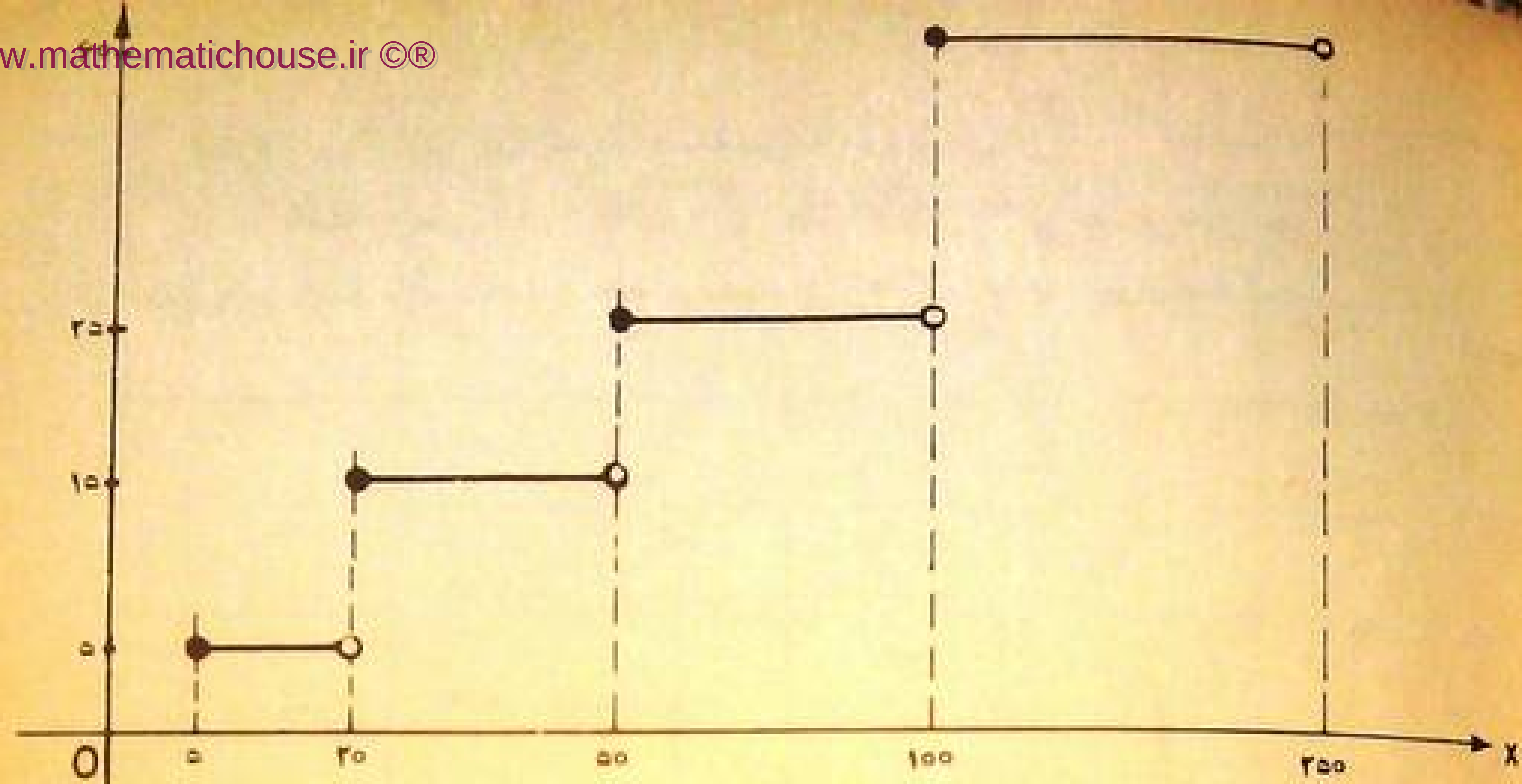
مثال ۱ - هزینه پست کردن‌یك پاکت به‌مقصد نقطه‌ای درداخل‌کشور (ازراه زمینی) تابعی است از وزن آن. برای محاسبهٔ مقادیر این تابع معمولا در پستخانه جدولی به‌شکل زیر وجـود دارد. (حداکثر وزن پاکتهای پستی که پستخانه می‌پذیرد ۲ کیلو گرم است).

وزن برحسب گرم	[۰و۲۰[	[۲۰و۵۰[	[۵۰و۱۰۰[	[۱۰۰و۲۵۰[	[۲۵۰و۵۰۰[	[۵۰۰و۱۰۰۰[	[۱۰۰۰و۱۵۰۰[	[۱۵۰۰و۲۰۰۰
هزینه برحسب ر	۵	۱۵	۲۵	۶۰	۱۱۵	۲۲۰	۳۱۵	۴۲۰

دامنهٔ این تابع فاصلهٔ [۰, ۲۰۰۰] و برد آن مجموعهٔ

$$\{۵, ۱۵, ۲۵, ۶۰, ۱۱۵, ۲۲۰, ۳۱۵, ۴۲۰\}$$

می‌باشد. نمودار قسمتی از این تابع درصفحهٔ بعدرسم شده است:



در زیر چند تابع رسم شده است .

مثال ۲ - مطلوبست رسم نمودار $y=[x]$ در فاصلهٔ $[-2, 2]$ می‌دانیم

$$e: R \longrightarrow Z$$

$$x \longmapsto [x]=n \qquad n \leqslant x < n+1$$

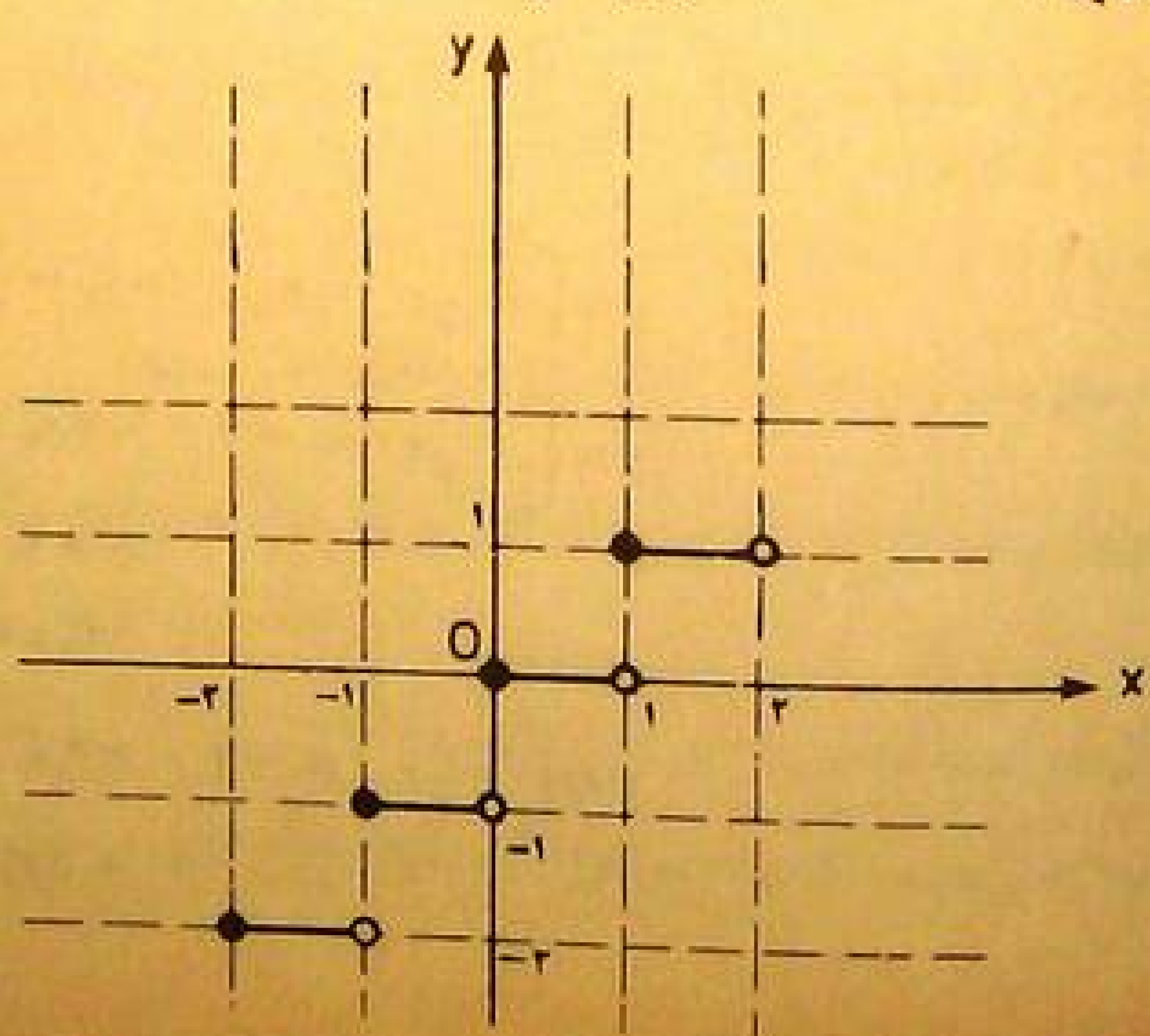
لذا مقدار تابع در فاصله‌های درست بقرار زیر است:

$$y=[x]=-2 \qquad -2 \leqslant x < -1$$

$$y=[x]=-1 \qquad -1 \leqslant x < 0$$

$$y=[x]=0 \qquad 0 \leqslant x < 1$$

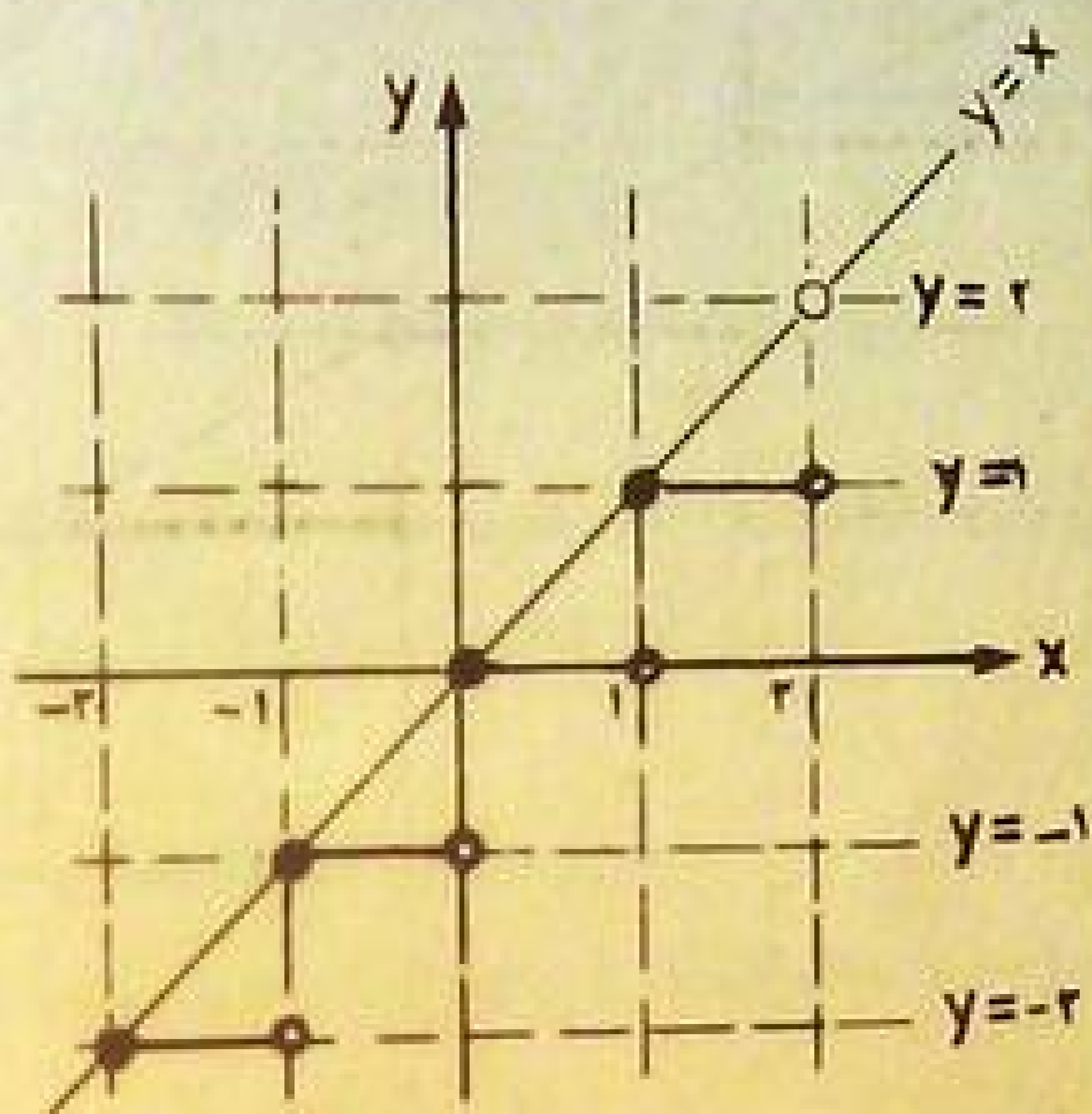
$$y=[x]=1 \qquad 1 \leqslant x < 2$$



تبصرهٔ ۱ - اگر دقت کنید نمودار صفحهٔ قبل به صورت زیر به دست آمده است.

- در فاصله $1 \leqslant x < 2$ - خط $y = x$ روی خط $y = 2 -$ تصویر شده است

- در فاصلهٔ $1 \leqslant x < 0$ - خط $y = x$ روی خط $y = 1 -$ تصویر شده است.



- در فاصلهٔ $n \leqslant x < n+1$ خط $y = x$ روی خط $y = n$ تصویر شده‌است.

واین قانون رسم، برای تمام توابعی که به‌صورت $y = [f(x)]$ باشند، درست است یعنی برای رسم تابع درفاصلهٔ $n \leqslant f(x) < n+1$ نمودار تابع $y = f(x)$ را روی خط $y = n$ تصویر می کنیم.

مثال ۳ - مطلوبست رسم نمودار تابع $y = \left[-\frac{1}{2}x\right]$ در فاصلهٔ $-2 \leqslant x < 6$ داریم:

$$y = \left[-\frac{1}{2}x\right] = n \qquad n \leqslant -\frac{1}{2}x < n+1$$

$$y = \left[-\frac{1}{2}x\right] = -3 \qquad -3 \leqslant -\frac{1}{2}x < -2$$

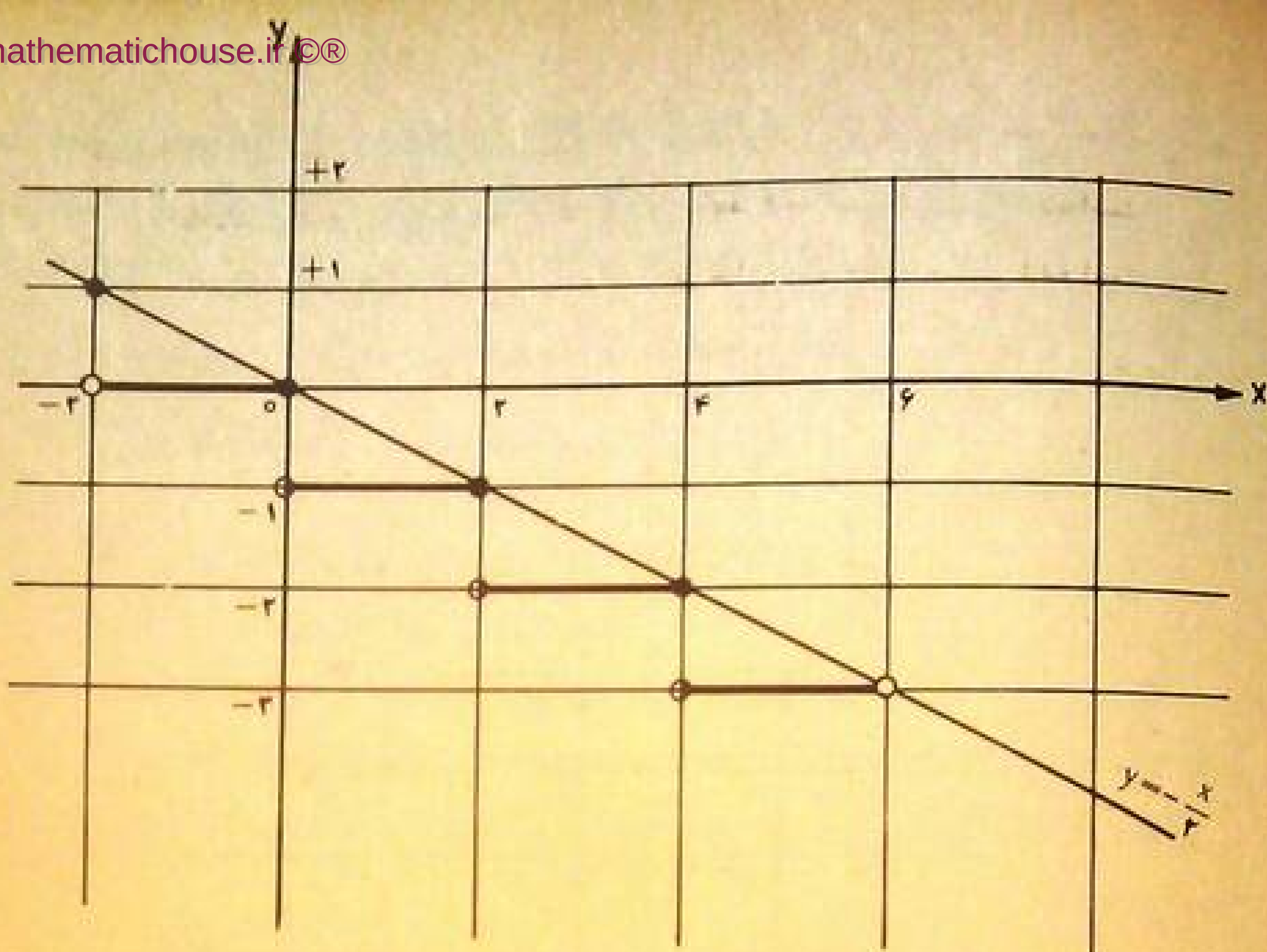
$$-6 \leqslant -x < -4$$

$$4 < x \leqslant 6$$

$$y = -3$$

$$y = \left[-\frac{1}{2}x\right] = -2 \qquad -2 \leqslant -\frac{1}{2}x < -1$$

$$-4 \leqslant -x < -2$$



$y=-۲ \qquad +۲<x\leqslant ۴$

$y=\left[-\frac{۱}{۲}x\right]=-۱ \qquad -۱\leqslant -\frac{۱}{۲}x<۰$

$-۲\leqslant -x<۰$

$y=-۱ \qquad ۰<x\leqslant ۲$

$y=\left[-\frac{۱}{۲}x\right]=۰ \qquad ۰\leqslant -\frac{x}{۲}<۱$

$۰\leqslant -x<۲$

$y=۰ \qquad -۲<x\leqslant ۰$

نمودار بالا را با توجه به تبصره ۱ رسم کنید

مثال ـ مطلوبست رسم نمودار $y=\frac{x}{[x]}$ در فاصلهٔ $[-۲, ۳[$

باید توجه داشت که تابع فوق درحالت کلی به‌صورت $y=\frac{x}{n}$ که $n\leqslant x<n+۱$ ، n و کسری نیست.

بنابرتعریف $[x]$ داریم:

در فاصلهٔ $-۲\leqslant x<-۱$ داریم $[x]=-۲$ در نتیجه $y=\frac{x}{-۲}$

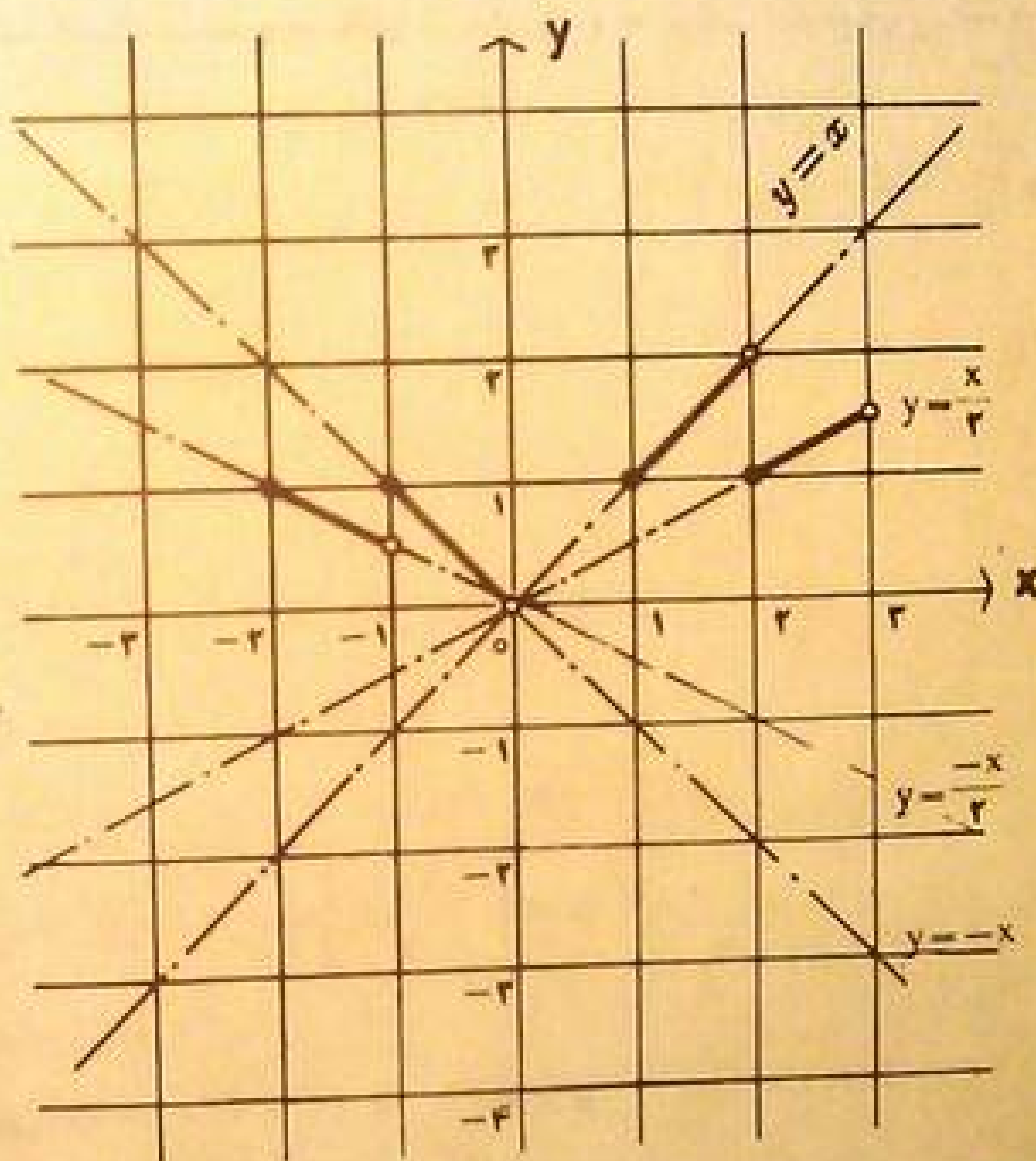
در فاصلهٔ $-1 \leqslant x < 0$ داریم $[x] = -1$ در نتیجه $y = -x$

در فاصلهٔ $0 \leqslant x < 1$ داریم $[x] = 0$ در نتیجه y تعریف نشده است.

در فاصلهٔ $1 \leqslant x < 2$ داریم $[x] = 1$ در نتیجه $y = x$

در فاصلهٔ $2 \leqslant x < 3$ داریم $[x] = 2$ در نتیجه $y = \frac{x}{2}$

نمودار تابع فوق در زیر رسم شده است:



تمرین

۱ــ حاصل‌های زیر را با برداشتن قدرمطلق بنویسید

الف ــ $|1-\sqrt{3}|$ ب ــ $-|-5|$ ج ــ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

د ــ $\sqrt{2(1+\cos 2x)}$ و $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ε عدد بسیار کوچک مثبتی است $|\varepsilon-1|$ و ـ $|\sin x-1|$ ـ ه

۲ـ قدر مطلق‌های زیر را به‌صورت تساوی‌ها یا نامساویهای مضاعف بنویسید

الف ـ $|x-2|=2$ ب ـ $|3-x|<1$

ج ـ $|x-1|<3$ د ـ $|x-x_0|<\varepsilon$

ه ـ $|f(x)-L|<\beta$

۳ـ نامساوی‌های زیر را به صورت قدر مطلق بنویسید

الف ـ $0<x<2$ ب ـ $1<x<3$

ج ـ $-3<x-5<1$ د ـ $-3<-x<-1$

۴ـ نقطه متغیر M به طول x و نقاط A ، B و C به ترتیب به طولهای ثابت a ، b و c روی محور هستند فاصله‌های AM ، BM و CM را با قدر مطلق نشان دهید.

۵ـ با توجه به ۳ اگر ε ، α و η اعداد بسیار کوچک و مثبت باشند نامساویهای زیر را تعبیر هندسی کنید.

$$|x-a|<\varepsilon \quad \text{و} \quad |x-b|<\alpha \qquad |x-c|<\eta$$

۶ـ ثابت کنید هرگاه $x\in[1,2]$ همواره تساوی زیر درست است :

$$|x-1|+|x-2|=1$$

۷ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف ـ $|x|=2$ ب ـ $|x+1|=6$

ج ـ $|x+1|+|x-3|=7$ د ـ $\dfrac{|x+2|}{|x-2|}=2 \quad x\neq 2$

۸ـ نامعادلات زیر را حل کنید:

الف ـ $|x|<2$ ب ـ $|-x|<\sqrt{3}$

ج ـ $|2x-3|<x$ د ـ $|x-1|<|x-3|$

۹ـ رسم کنید:

الف ـ $|x+2y|=2$ ب ـ $|x-y|=2$

ج ـ $|x|+|y|=3$ د ـ $3|x|+5y+9=0$

ه ـ $y=\sqrt{(x^2+4x+4)}+\sqrt{x^2}$ و ـ $y=2x-\sqrt{x^2-6x+9}$

۱۰ـ ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant|a|+|b|$$

$$|a-b|\geqslant|a+b|-2|b|$$

۱۱- توابع زیر را درفاصله [۳,۳−] رسم کنید :

الف - $y=2[x]$ ب - $y=x-[x]$

ج - $y=3x-2[x]$ د - $y=\frac{x-2}{[x]}$

ه - $y=x+[3x]$

متغیری که به سمت صفر میل می‌کند

– وقتی می‌نویسیم فاصلهٔ نقطه M روی محور x ها تا مبداء یعنی $|x|$ کوچکتر از ۰/۱ است یعنی نقطهٔ M بمبدأ نزدیک است: $|x|<0/1$
(نقطهٔ M می‌تواند در طرفین O قرار گیرد)

– وقتی بیان می‌کنیم که فاصلهٔ نقطه M تا مبدأ از ۰/۰۱ کوچکتر است یعنی نقطهٔ M بمبدأ نزدیکترشده است $|x|<0/01$

– اگر گفته شود فاصلهٔ نقطه M تا مبدأ کوچکتر از ۰/۰۰۱ است یعنی M باز هم بمبدأ نزدیکتر شده است $|x|<0/001$

....

....

– وقتی می‌گوئیم فاصلهٔ نقطهٔ M تامبدأ کوچکتر از ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ است یعنی نقطهٔ M خیلی‌خیلی بمبدأ نزدیک شده است بجای این عدد کوچك و یا هرعدد کوچك مثبت دیگر از نمادهای ε و η و α و β استفاده کرده مفهوم:

نقطهٔ متغیر M بمبدأ خیلی خیلی نزدیك می‌شود بصورتهای زیر بیان می‌کنیم:

$$|x|<\beta \quad \text{یا} \quad |x|<\alpha \quad \text{یا} \quad |x|<\eta \quad \text{یا} \quad |x|<\varepsilon$$

اصطلاح دیگری که در اینجا بکار برده می‌شود این است که می‌گوئیم x به سمت صفرمیل کرده است و می‌نویسیم $x \to 0$ و یا می‌گوئیم x یك بی‌نهایت کوچك است.

متغیری که به‌سمت عدد ثابت x_0 میل می‌کند

روی یك محور، نقطهٔ متغیر M به طول x می‌تواند از طرف چپ یا از طرف راست به‌نقطهٔ ثابت A به طول x_0 نزدیك شود به قسمی که طول AM از هر عدد مثبت کوچکی مانند ε (هر قدر هم ε کوچك درنظر گرفته شود) کوچکتر گردد.

M ازطرف چپ به A نزدیك می‌شود

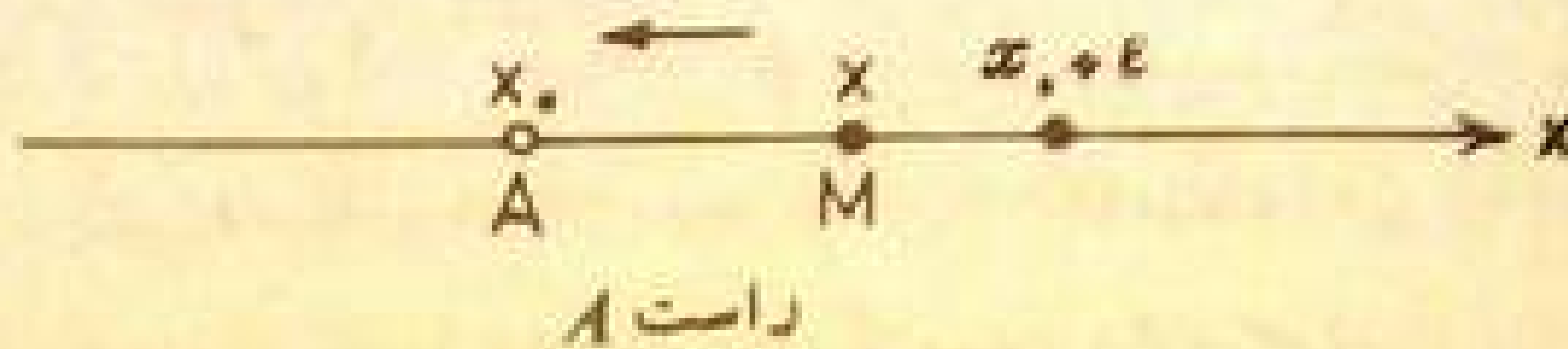
M از طرف راست به A نزدیك می‌شود

در اینجا اصطلاحاً می گویند نقطهٔ متغیر M به سمت نقطهٔ ثابت A میل می کند و یا به طور ساده x به x_0 میل می کند و می نویسیم $x \to x_0$ و $x \neq x_0$ و یا:

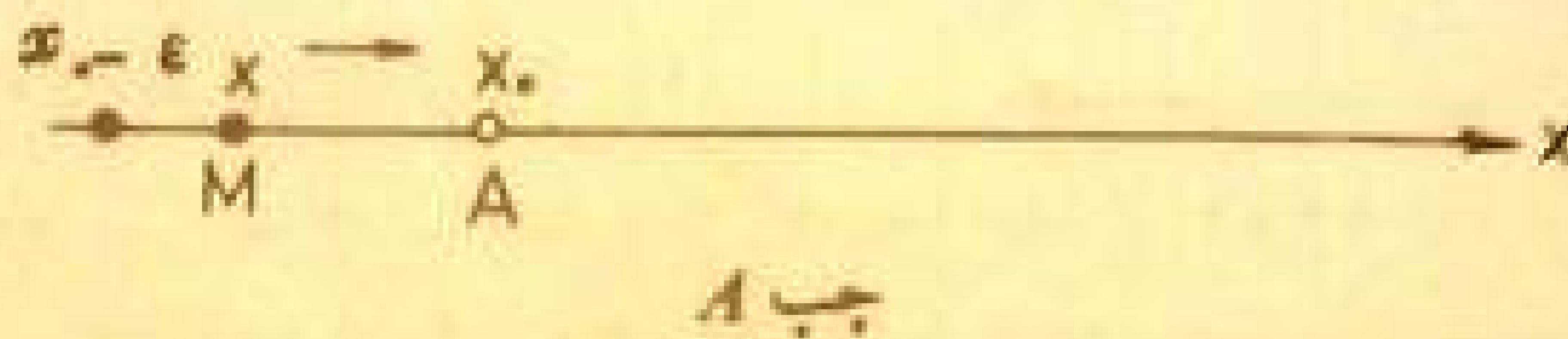
$$x \text{ به سمت } x_0 \text{ میل می کند} \overset{\text{یعنی}}{\Longleftrightarrow} (x \to x_0)$$

اگر ε یکعدد مثبت بسیار کوچکی باشد مفهوم فوق به‌صورت زیر بیان می گردد:

$$AM < \varepsilon$$



راست A



چپ A

و یا با توجه به تعریف فاصلهٔ دو نقطهٔ روی یك محور:

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad (1)$$

پس:

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon \overset{\text{یعنی}}{\Longleftrightarrow} (x \to x_0)$$

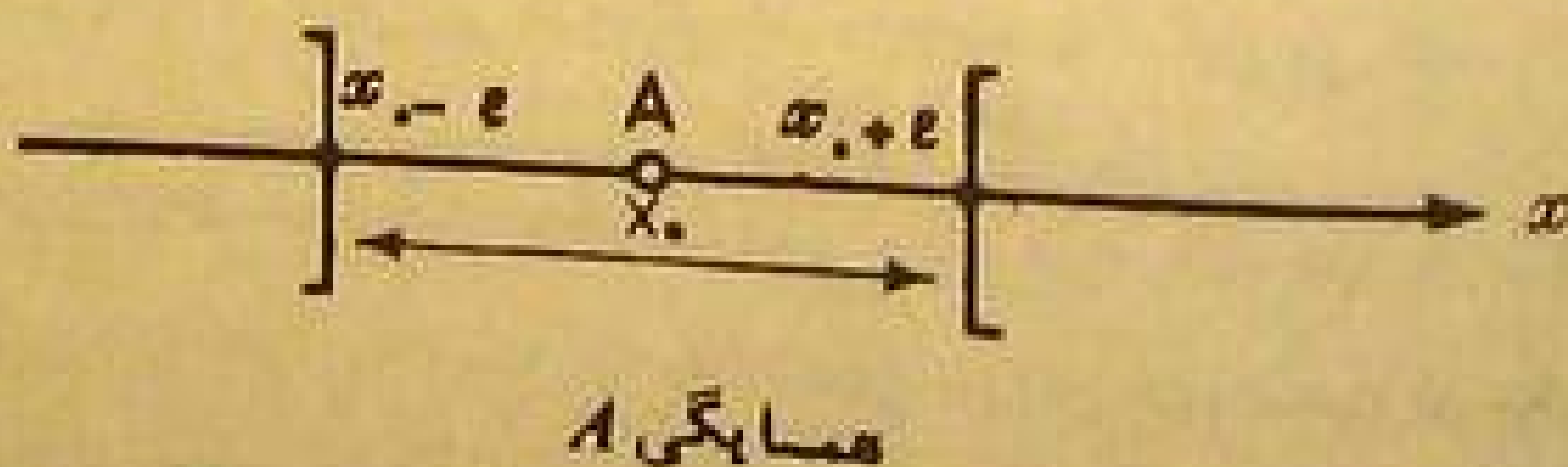
همسایگی نقطهٔ A ـ طبق آنچه در قدر مطلق و فاصله گفته شد می‌توان نوشت:

$$x \neq x_0 , |x - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < (x - x_0) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow x \in]x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon[$$

فاصلهٔ $]x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon[$ را یك همسایگی به مرکز x_0 به شعاع ε خوانده و آنرا به‌صورت $N(x_0 , \varepsilon)$ یا $N(x_0)$ نمایش می‌دهند.



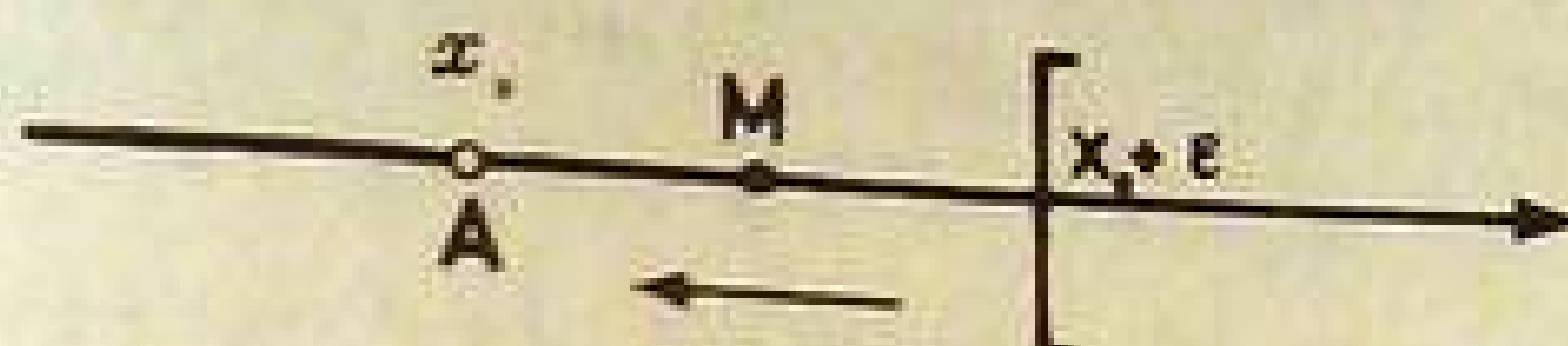
همسایگی A

فاصلهٔ $]x_0 , x_0 + \varepsilon[$ را سمت راست A می‌خوانند و وقتی می نویسند $x \in]x_0 , x_0 + \varepsilon[$ ، منظور این‌است که نقطهٔ متغیر M به طول x در طرف راست A حرکت می کند و یا x از طرف راست به

و $x \to x_0^+$ می‌نویسند ... زدیک می‌شود و می‌نویسند

سمت x_0 میل می‌کند و یا x با مقادیر بزرگتر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود

یا



طرف راست A

یعنی

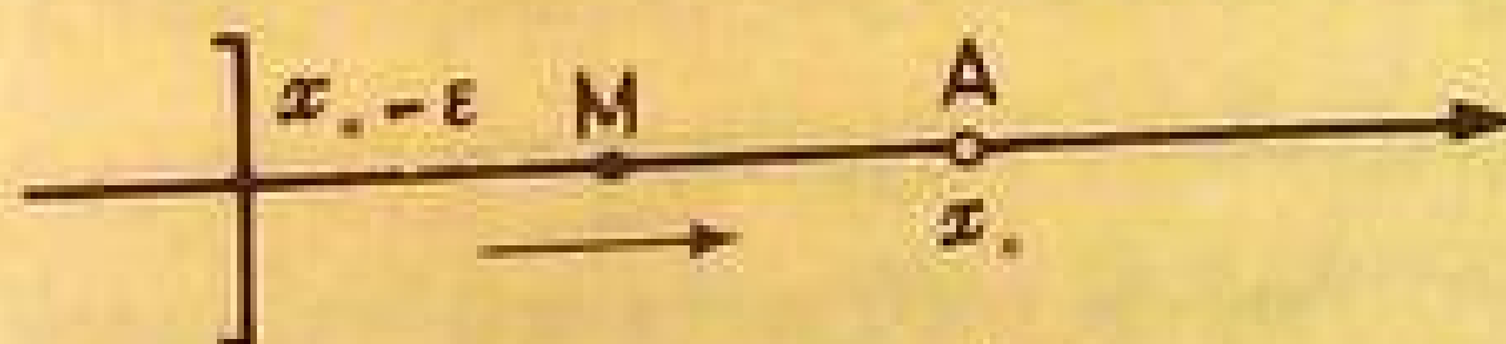
x از طرف راست به x_0 میل می‌کند $\Longleftrightarrow$ $x \to x_0^+$

مثال - اگر $x_0 = 1$، وقتی x به ترتیب مقادیر ۱/۱، ۱/۰۱، ۱/۰۰۱، ۱/۰۰۰۱، ... ۱/۰۰۰۰۱ را می‌گیرد می‌گویند x با مقادیر بزرگتر از ۱ به سمت ۱ میل می‌کند و یا x از طرف راست به ۱ نزدیک می‌شود.



طرف راست ۱

فاصلهٔ $]x_0-\varepsilon, x_0[$ را سمت چپ A می‌خوانند و وقتی می‌نویسند $x \in]x_0-\varepsilon, x_0[$، یعنی نقطهٔ متغیر M به‌طول x در طرف چپ A حرکت می‌کند و یا x از طرف چپ به سمت x_0 میل می‌کند و یا x با مقادیر کوچکتر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود و می‌نویسند $x \to x_0^-$.



طرف چپ A

یعنی

x از طرف چپ به x_0 میل می‌کند $\Longleftrightarrow$ $(x \to x_0^-)$

مثال - اگر $x_0 = 1$ وقتی x به‌ترتیب مقادیر ۰/۹، ۰/۹۹، ۰/۹۹۹، ... می‌گیرد می‌گویند x از طرف چپ یا با مقادیر کوچکتر از ۱ به‌سمت ۱ میل می‌کند.



طرف چپ ۱

متغیری که به سمت $+\infty$ میل می‌کند

روی محور اگر نقطهٔ متغیر M به‌طول x سمت راست مبدأ بوده و از مبدأ خیلی خیلی دور شود طوری

که فاصله‌اش تا مبداء از هرعدد مثبت بزرگ قابل تصوری بزرگتر گردد دراینصورت گفته می‌شود M یا x به‌سمت بی‌نهایت مثبت میل می کرده ومی‌نویسند $x \longrightarrow +\infty$ گاهی اوقات عددمثبت خیلی‌خیلی بزرگ را با U نشان داده مفهوم مزبور را با زبان ریاضی چنین می‌نویسند:



$$(x>U) \overset{\text{یعنی}}{\Longleftrightarrow} (x \longrightarrow +\infty)$$

دراین‌جا x را یك بی‌نهایت بزرگ می‌خوانند.

متغیری که به سمت $-\infty$ میل می کند

اگر نقطهٔ متغیر M به‌طول x سمت چپ مبداء بوده و از مبداء خیلی خیلی دور شود طوری که فاصله‌اش تا مبداء از هر عدد منفی کوچکتر گردد در اینصورت گفته می‌شود M یا x به سمت بی‌نهایت منفی میل کرده و می‌نویسند $x \longrightarrow -\infty$ در این‌جا نیز می‌نویسیم:



$$(x<-U) \overset{\text{یعنی}}{\Longleftrightarrow} (x \longrightarrow -\infty)$$

در اینصورت x را یك بی‌نهایت بزرگ منفی می‌نامند.

باید توجه داشت که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. مجموعهٔ $R^* = R \cup \{-\infty \text{ و } +\infty\}$ را یك‌توسیع R (مجموعهٔ اعداد حقیقی) می‌نامیم دراین‌مجموعه اعمال زیر را تعریف می کنیم . $a \in R$

$$\begin{cases} +\infty+\infty=+\infty \\ -\infty-\infty=-\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} a+\infty=+\infty+a=+\infty \\ a+(-\infty)=(-\infty)+a=-\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\times +\infty=+\infty\times a=+\infty \\ a\times -\infty=-\infty\times a=-\infty \end{cases} \quad a>0$$

$$\begin{cases} a\times +\infty=+\infty\times a=-\infty \\ a\times(-\infty)=(-\infty)\times a=+\infty \end{cases} \quad a<0 \qquad \begin{matrix} +\infty\times +\infty=+\infty \\ -\infty\times -\infty=+\infty \end{matrix}$$

$$+\infty\times -\infty=-\infty\times +\infty=-\infty$$

باید توجه داشت که $-\infty$ مقابل جمعی $+\infty$ نیست و $0 = +\infty-\infty$ نادرست است بلکه $+\infty-\infty$ را بی‌معنی‌می‌خوانیم عبارات‌بی‌معنی‌دیگرعبارتست: $0\times +\infty$، $0\times -\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$ و . . . در مبحث حد سعی می کنیم، مقادیر نزدیك باین‌عبارات را حساب کنیم.

فصل ۴

مفهوم حد و پیوستگی

۱ـ حد تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات «حد» است. در موارد زیادی احتیاج است که رفتار تابعی را در نزدیکی نقطه‌ای مطالعه کنیم و ببینیم که وقتی متغیر به‌آن نقطه نزدیك می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی نزدیك می‌شوند یا خیر. در حالتی که مقادیر تابع به عددی نزدیك شوند، اصطلاحاً گفته میشود که تابع در آن نقطه دارای حد است. هدف ما دراین فصل این‌است که مفهوم حد را تا اندازه‌ای که در خوراین کتاب باشد روشن سازیم. برای این که ذهن شما را برای پذیرش تعریف دقیق حد آماده سازیم، مثال زیر را می آوریم:

مثال - تابع f راکه بوسیلهٔ دستور

$$f(x)=\frac{(۲x+۳)(x-۱)}{(x-۱)}$$

تعریف شده است در نظر می گیریم. دامنهٔ تعریف این تابع $R-\{۱\}$ است. اگر $x\neq ۱$، میتوان صورت و مخرج را بر $x-۱$ تقسیم کرد و بدست آورد:

$$f(x)=۲x+۳,\ x\neq ۱$$

می‌خواهیم مقادیر این تابع را وقتی که x به‌عدد یك نزدیك شود (ولی مساوی آن نباشد) بررسی کنیم. ابتدا، فرض کنید که x مقادیر ۰ ، ۰/۲۵ ، ۰/۵ ، ۰/۷۵ ، ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ و نظایر آن را اختیار کند از طرف چپ به ۱ نزدیك شود بدین ترتیب مقادیر x همواره کمتر از یك هستند و به یك نزدیکتر و نزدیکتر می‌شوند، به عبارت دیگر متغیر x با مقادیر کوچکتر از یك به سمت یك میل می کند. این مقادیر x و مقادیر نظیر آنها را برای f در جدول زیر درج کرده‌ایم.

x	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)=۲x+۳$ $x\neq ۱$	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۴/۸	۴/۹۸	۴/۹۹۸	۴/۹۹۹۸	۴/۹۹۹۹۸

حال فرض کنید که متغیر x از میان اعداد بزرگتر از یك به سمت یك نزدیك شود. بعبارت دیگر از طرف راست به ۱ نزدیك گردد. یعنی مثلا x مقادیر ۲ ، ۱/۷۵ ، ۱/۵ ، ۱/۲۵ ، ۱/۱ ،

۱/۰۱ ، ۱/۰۰۱ ، ۱/۰۰۰۱ ، ۱/۰۰۰۰۱ و نظائرآن را اختیار نماید. در جدول زیراین مقادیر و مقادیر نظیر آنها را برای تابع درج کرده‌ایم:

x	۲	۱/۷۵	۱/۵	۱/۲۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
$f(x)=$ ۲$x+$۳ $x\neq$ ۱	۷	۶/۵	۶	۵/۵	۵/۲	۵/۰۲	۵/۰۰۲	۵/۰۰۰۲	۵/۰۰۰۰۲

از این دو جدول مشاهده می‌شود که وقتی x به یک نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود، $f(x)$ به ۵ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود، و هر چه x به یک نزدیکتر باشد، $f(x)$ به ۵ نزدیکتر است. مثلا از جدول اول ملاحظه می‌شود که وقتی ۰/۹ $=x$ ، ۴/۸ $=f(x)$ ، یعنی وقتی x به‌اندازهٔ ۰/۱ از یک کمتر است $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۲ از ۵ کمتر است، و وقتی ۰/۹۹۹ $=x$ ، داریم ۴/۹۹۸ $=f(x)$ ، یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱ از یک کمتر است $f(x)$ به‌اندازهٔ ۰/۰۰۲ از ۵ کمتر می‌باشد. همینطور، وقتی ۰/۹۹۹۹ $=x$ ، آنوقت ۴/۹۹۹۸ $=f(x)$ ، یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۰۱ کمتر از یک است $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۰۲ کمتر از ۵ است.

جدول دوم نشان می‌دهد که وقتی ۱/۱ $=x$، داریم ۵/۲ $=f(x)$ ، یعنی وقتی x به‌اندازهٔ ۰/۱ از یک بیشتر است $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۲ از ۵ بیشتر است، وقتی که ۱/۰۰۱ $=x$ داریم ۵/۰۰۲ $=f(x)$ ، یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱ ازیک بیشتر است $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۲ از ۵ بیشتر می‌باشد. بالاخره وقتی‌که ۱/۰۰۰۱ $=x$، آنوقت ۵/۰۰۰۲ $=f(x)$، یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۰۱ از یک بیشتر است $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۰۲ از ۵ بیشتر است.

بنابراین از دو جدول فوق مشاهده می‌شود که وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱$\pm$ با یک تفاوت دارد (یعنی ۰/۹۹۹ $=x$، یا ۱/۰۰۱ $=x$) عدد $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۲$\pm$ با ۵ تفاوت دارد (یعنی ۴/۹۹۸ $=f(x)$ یا ۵/۰۰۲ $=f(x)$) و وقتی که x به‌اندازهٔ ۰/۰۰۰۱$\pm$ با یک تفاوت دارد $f(x)$ به اندازهٔ ۰/۰۰۰۲$\pm$ با ۵ تفاوت دارد.

اکنون اگر موضوع را از دید دیگری مطالعه کنیم، یعنی ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر بگیریم، می‌بینیم که می‌توان مقادیر $f(x)$ را هر اندازه‌که بخواهیم به ۵ نزدیک سازیم هر گاه مقادیر x را به اندازهٔ کافی به یک نزدیک ساخته باشیم. به بیان دیگر می‌توان قدر مطلق تفاوت بین $f(x)$ و ۵ را هر چقدر که بخواهیم کوچک نمائیم به شرط آنکه قدرمطلق تفاوت بین x ویک را به اندازهٔ کافی کوچک ساخته باشیم، یعنی هر چقدر بخواهیم می‌توان $|f(x)-$ ۵$|$ راکوچک کنیم هرگاه $|x-$ ۱$|$ را به اندازهٔ کافی کوچک ساخته باشیم.

یک روش دقیق‌تر برای بیان این مطلب این است که ازدونماد برای نشان دادن این‌تفاوت‌های کوچک استفاده کنیم. معمول است که حروف یونانی ε (اپسیلن) و δ (دلتا) را بکار برند.

بنابراین می گوئیم: $|f(x)-۵|$ از عدد مثبت ε کوچکتر خواهد بود هرگاه $|x-۱|$ از عدد مثبت δ کوچکتر باشد و $|x-۱|\neq ۰$ (زیرا $x\neq ۱$). [توجه به این نکته که δ به ε بستگی دارد مهم است.] باز هم می‌توان این مطلب را به شکل دیگری بیان داشت:

به ازای هر عدد مثبت ε، $|f(x)-۵|$ را می‌توان از ε کوچکتر ساخت به شرط آن که $|x-۱|$ به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، یعنی عدد مثبت به اندازهٔ کافی کوچکی مانند δ وجود داشته باشد به قسمی که:

$$۰<|x-۱|<\delta \Longrightarrow |f(x)-۵|<\varepsilon \qquad (۱)$$

از دو جدول فوق ملاحظه می‌شود که $|f(x)-۵|=۰/۲$ وقتی که $|x-۱|=۰/۱$

بنابراین اگر $\varepsilon=۰/۲$، δ را $۰/۱$ اختیار می کنیم و داریم:

$$۰<|x-۱|<۰/۱ \Longrightarrow |f(x)-۵|<۰/۲$$

و این همان رابطهٔ (۱) است با $\varepsilon=۰/۲$ و $\delta=۰/۱$.

همچنین $|f(x)-۵|=۰/۰۰۲$ هرگاه $|x-۱|=۰/۰۰۱$. بنابراین، اگر $\varepsilon=۰/۰۰۲$، δ را برابر $۰/۰۰۱$ انتخاب می کنیم و داریم:

$$۰<|x-۱|<۰/۰۰۱ \Longrightarrow |f(x)-۵|<۰/۰۰۲$$

و این همان رابطهٔ (۱) است با $\varepsilon=۰/۰۰۲$ و $\delta=۰/۰۰۱$.

بطور مشابه اگر $\varepsilon=۰/۰۰۰۲$، اختیار می کنیم $\delta=۰/۰۰۰۱$ و داریم:

$$۰<|x-۱|<۰/۰۰۰۱ \Longrightarrow |f(x)-۵|<۰/۰۰۰۲$$

و این نیز همان رابطهٔ (۱) است با $\varepsilon=۰/۰۰۰۲$ و $\delta=۰/۰۰۰۱$.

می‌توان این کار را ادامه داده به ε هر عدد مثبت کوچکی نسبت داد و برای آن δ مناسبی یافت به قسمی که هرگاه $۰<|x-۱|<\delta$ آنگاه $|f(x)-۵|<\varepsilon$. حال که به ازای هر عدد مثبت ε می‌توان یك δ مثبت یافت به‌قسمی که $۰<|x-۱|<\delta$ نتیجه دهد $|f(x)-۵|<\varepsilon$ می گوئیم که حد $f(x)$ وقتی x به سمت یك میل کند برابر ۵ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۵ \quad (\text{حد})$$

توجه کنید که همه جا در بحث فوق نوشته‌ایم $۰<|x-۱|$، این شرط بدین سبب گذاشته شده است که ما فقط با مقادیر $f(x)$ به ازای x های نزدیك به یك، ولی نه مساوی با خود یك، سروکار داریم. در حقیقت این تابع در ۱ تعریف نشده است.

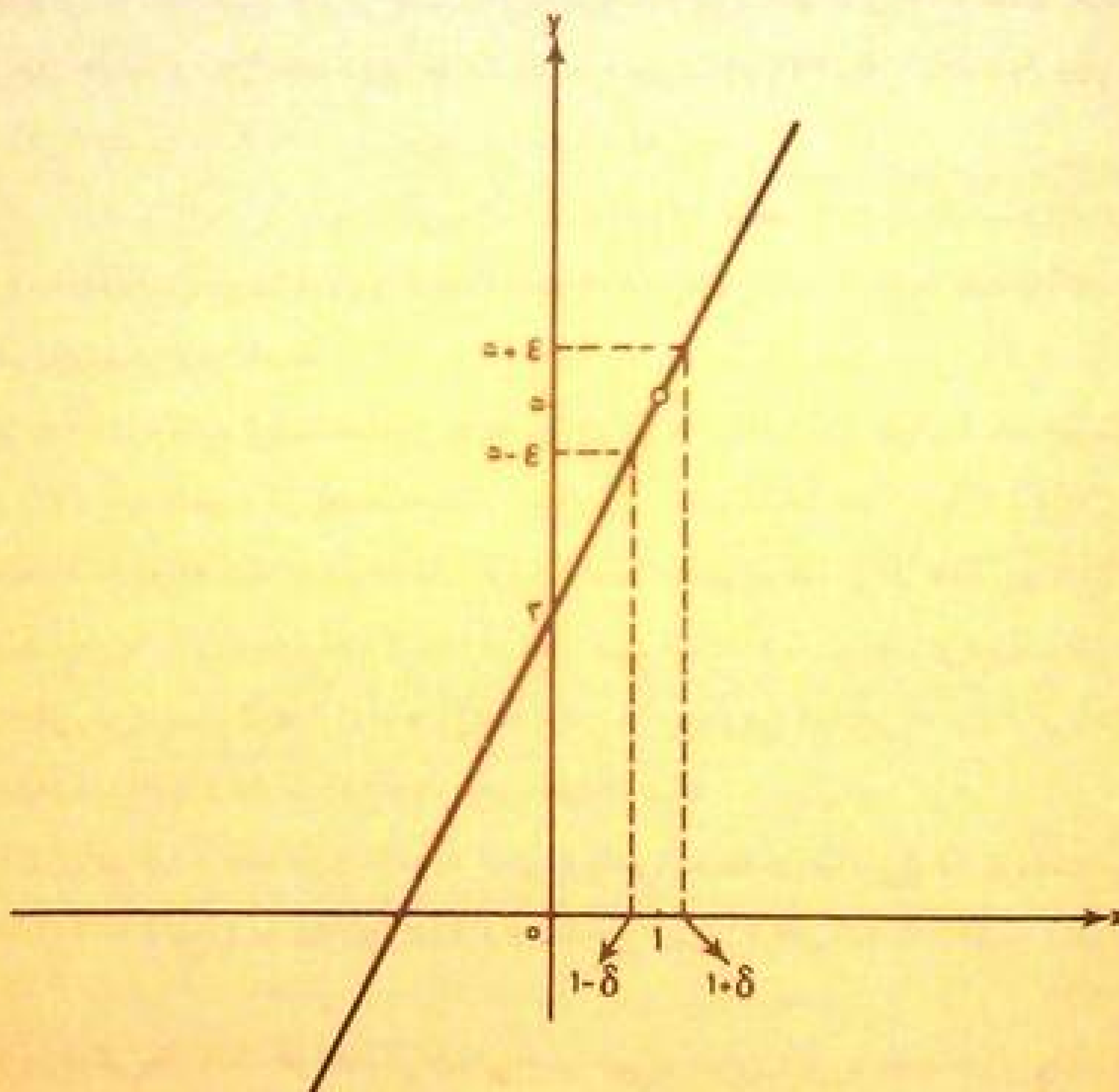
حال می‌خواهیم مفهوم حد فوق را از دید هندسی بررسی کنیم.

شکل صفحهٔ بعد اهمیت ε و δ را از دید هندسی برای ما روشن میسازد. می‌بینیم که $f(x)$ روی محور y ها بین $۵-\varepsilon$ و $۵+\varepsilon$ واقع خواهد بود هرگاه که $x\neq ۱$ روی محور x ها بین

$1-\delta$ و $1+\delta$ واقع باشد؛ یا:

$$0<|x-1|<\delta \Longrightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$$

راه دیگری برای بیان این مطلب چنین است: بوسیلهٔ محدود کردن $x\neq 1$ روی محور xها بین $1-\delta$ و $1+\delta$ می‌توان $f(x)$ را مقید کرد که روی محور y ها بین $5-\varepsilon$ و $5+\varepsilon$ واقع باشد.



توجه کنید که مقادیر ε را می‌توان بطور دلخواه و هر چقدر بخواهیم کوچک انتخاب کرد و مقدار δ به مقدار ε انتخاب شده بستگی دارد. همچنین باید اشاره کرد که هر چه ε کوچکتر باشد مقدار δ متناظر آن کوچکتر می‌شود.

بطور خلاصه برای این مثال می‌توان گفت که $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ حد زیرا به ازای هر $\varepsilon>0$ (هر چقدر هم که کوچک باشد) عدد مثبتی چون δ (وابسته به ε) وجود دارد بطوریکه

$$0<|x-1|<\delta \Longrightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$$

۲ـ تعریف

تابع f و فاصله باز I را که شامل x_0 است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که f در همهٔ نقاط I، مگر محتملا در x_0، تعریف شده باشد. گوئیم وقتی x به‌سمت x_0 میل می‌کند تابع f دارای حد L_0 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L_0$$

هر گاه به‌ازای هر عدد مثبت ε (هر چقدر هم که کوچک باشد) عدد مثبتی مانند δ وجود داشته‌باشد به قسمی که:

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L_0|<\varepsilon$$

به بیان دیگر. این تعریف می گوید که حد تابع f وقتی x به سمت x_0 میل کند L_0 است هر گاه شرط زیر برقرار باشد:

با به اندازه کافی نزدیک ساختن x به x_0 (ولی نه مساوی آن) بتوان قدر مطلق تفاوت $f(x)$ و L_0 را به دلخواه کوچک ساخت.

تبصره - توجه کنید که در تعریف فوق در بارهٔ مقدار تابع f در نقطهٔ x_0 هیچ چیز بیان نشده است. یعنی، برای وجود حد f در x_0 احتیاجی نیست که f در x_0 تعریف شده باشد. همچنین وقتی می‌نویسیم $0<|x-x_0|<\delta$ فرض را بر آن می گذاریم که x را از دامنهٔ تعریف تابع اختیار کرده‌ایم، و در نتیجه $f(x)$ معین خواهد بود.

اکنون در مورد چند تابع ساده به ازای ε داده شده مقدار متناظر δ را به دست می‌آوریم.

مثال ۱ - تابع $f(x)=۲x-۱$ را درنظرمی گیریم. فرض کنید که بدانیم $\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۱$ (این را در مثال بعد ثابت خواهیم کرد). می‌خواهیم به ازای $\varepsilon=۰/۰۱$ عددی مثبت مانند δ بیابیم به قسمی که:

$$0<|x-۳|<\delta \Longrightarrow |f(x)-۱۱|<۰/۰۱$$

داریم:

$$|f(x)-۱۱|=|(۲x-۱)-۱۱|=|۲x-۱۲|=۲|x-۳|$$

بنابراین می‌خواهیم که:

$$0<|x-۳|<\delta \Longrightarrow ۲|x-۳|<۰/۰۱$$

یا :

$$0<|x-۳|<\delta \Longrightarrow |x-۳|<۰/۰۰۵$$

اگر δ را مساوی ۰/۰۰۲۵ اختیار کنیم خواهیم داشت:

$$0<|x-3|<0.0025 \Longrightarrow |(4x-1)-11|<0.01 \qquad (1)$$

توجه به این نکته دارای اهمیت است که در این مثال هرعدد مثبت کوچکتر از ۰/۰۰۲۵ را نیز می‌توان به عنوان δ اختیار کرد. یعنی اگر $0<\delta<0.0025$ و گزاره (۱) برقرار باشد، آنگاه

$$0<|x-3|<\delta \Longrightarrow |(4x-1)-11|<0.01 \qquad (2)$$

زیرا هر x که در $0<|x-3|<\delta$ صدق کند در $0<|x-3|<0.0025$ نیز صدق می‌کند.

در بحث فوق به ازای یک ε خاص δ را تعیین کردیم. اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ بتوانیم عددی مثبت مانند δ تعیین کنیم که در تعریف حد صدق کند، آنوقت ثابت کرده‌ایم که:

$$\lim_{x\to 3}(4x-1)=11$$

این را در مثال بعد بررسی می‌کنیم.

مثال ۲ - می‌خواهیم با استفاده از تعریف حد نشان دهیم که $\lim_{x\to 3}(4x-1)=11$.

باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که:

$$0<|x-3|<\delta \Longrightarrow |(4x-1)-11|<\varepsilon$$

داریم:

$$|(4x-1)-11|=|4x-12|=4|x-3|$$

بنابراین می‌خواهیم که:

$$0<|x-3|<\delta \Longrightarrow 4|x-3|<\varepsilon$$

اما این بیان معادل است با:

$$0<|x-3|<\delta \Longrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$$

بنابراین اگر δ را برابر $\frac{\varepsilon}{4}$ اختیار کنیم، داریم:

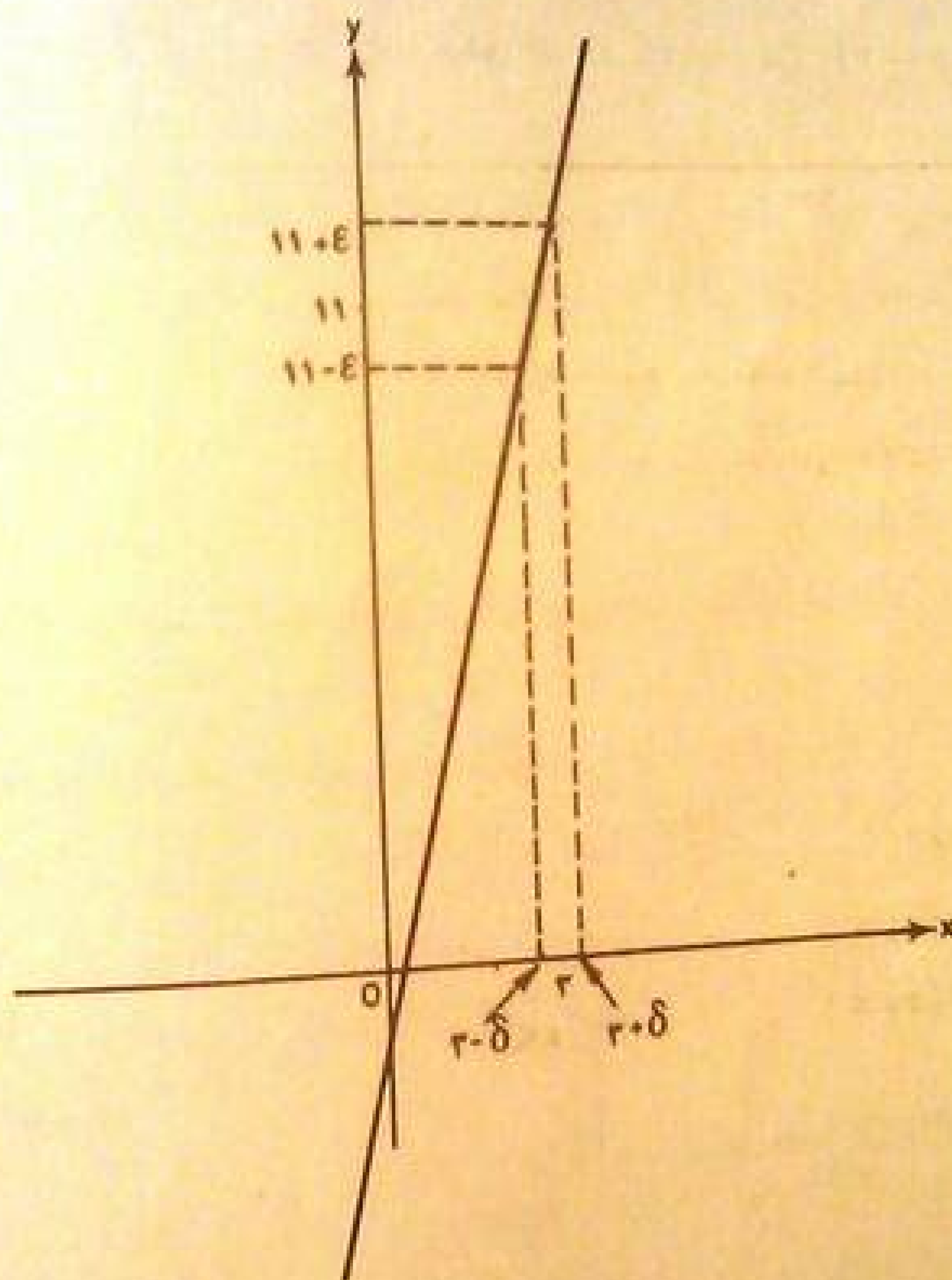
$$0<|x-3|<\frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow 4|x-3|<4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon$$

یعنی:

$$0<|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow |(4x-1)-11|<\varepsilon$$

این نشان می‌دهد که $\lim\limits_{x\to ۳}(۴x-۱)=۱۱$. بویژه اگر $\varepsilon=۰/۰۱$ خواهیم داشت $\delta=۰/۰۰۲۵$ که همان مقداری است که بـرای δ در مثال ۱ به دست آوردیـم. در اینجا نیز می‌توان هر عدد مثبت δ' که از $\frac{\varepsilon}{۴}$ کمتر باشد را به عنوان δ اختیار کرد.

نمودار این تابع و مقادیر ε و δ را در شکل زیر نشان داده‌ایم.



مثال ۳ - با استفاده از تعریف حـد می‌خواهیم نشان دهیم کـه $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱}=۲$.

برای این کار باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon>۰$ یك $\delta>۰$ وجود دارد به قسمی که

$$۰<\left|x-\frac{۱}{۲}\right|<\delta \Rightarrow \left|\frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱}-۲\right|<\varepsilon \qquad (۱)$$

اما می‌توان نوشت:

$$\frac{4x^2-1}{2x-1}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=2x+1 \quad \text{و} \quad x\neq\frac{1}{2}$$

پس گزاره (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$0<|x-\frac{1}{2}|<\delta \Longrightarrow |(2x+1)-2|<\varepsilon$$

و یا:

$$0<|x-\frac{1}{2}|<\delta \Longrightarrow |2x-1|<\varepsilon$$

و یا :

$$0<|x-\frac{1}{2}|<\delta \Longrightarrow 2|x-\frac{1}{2}|<\varepsilon$$

و یا :

$$0<|x-\frac{1}{2}|<\delta \Longrightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

پس کافیست که δ را برابر $\frac{\varepsilon}{2}$ و یا هر عدد مثبت کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ اختیار کنیم، آنوقت:

$$0<|x-\frac{1}{2}|<\delta \Longrightarrow |\frac{4x^2-1}{2x-1}-2|<\varepsilon$$

در نتیجه بنا به تعریف حد داریم:

$$\underset{x\to\frac{1}{2}}{\text{حد}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2$$

قضیه ــ می‌خواهیم نشان دهیم که اگر تابع f در R ثابت باشد، یعنی $f(x)=c$ به ازای هر $x\in R$، آنگاه حد f در هر نقطهٔ x_0 برابر c است. پس باید به ازای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ به دست آوریم به قسمی که:

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-c|<\varepsilon \qquad (1)$$

اما چون $f(x)$ همواره عدد ثابت c است پس:

$$f(x)-c=c-c=0$$

و در نتیجه $|f(x)-c|=0$. چون صفر از هر عدد مثبت ε کوچکتر است پس گزارهٔ (۱) برای هر $\delta>0$ برقرار است، یعنی:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\, c=c$$

قضیه ـ می‌خواهیم نشان دهیم که حد تابع $f(x)=x$ وقتی کـه x به سمت عـدد a میل کند برابر خود a است. باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یك $\delta>0$ وجود دارد به‌قسمی که:

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |x-a|<\varepsilon \qquad (1)$$

به وضوح دیده می‌شود که هر δ که در شرط $0<\delta\leqslant\varepsilon$ صدق کند گزارهٔ (۱) را به یك گزارهٔ درست تبدیل می کند، پس آنچه می‌خواستیم ثابت شد.

۳ـ حد چپ و راست

هرگاه خواسته باشیم رفتار تابع f را وقتی که x فقط از سمت راست یـا فقط از سمت چپ به x_0 نزدیك شود مطالعه نمائیم، حدراست وچپ در x_0 مطرح خواهدشد. بنابراین تعاریف زیر را می‌نمائیم.

تعریف ـ گفته می‌شود: (الف) تابع f در x_0 دارای حد راست L_1 است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$ حد، درصورتیکه x از سمت‌راست به x_0 نزدیك شود مقادیر f به L_1 نزدیك‌شود.

(ب) تابع f در x_0 دارای حدچپ L_2 است ومی‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$ حد، در صورتیکه x از سمت چپ به x_0 نزدیك شود مقادیر f به L_2 نزدیك شود.

این تعاریف را می‌توان بطور دقیق‌تر برحسب ε و δ بیان کـرد کـه در اینجا از بیان آنها صرفنظر می کنیم.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ـ تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد است اگر و تنها اگر f در x_0 دارای حد راست و حد چپ مساوی باشد.

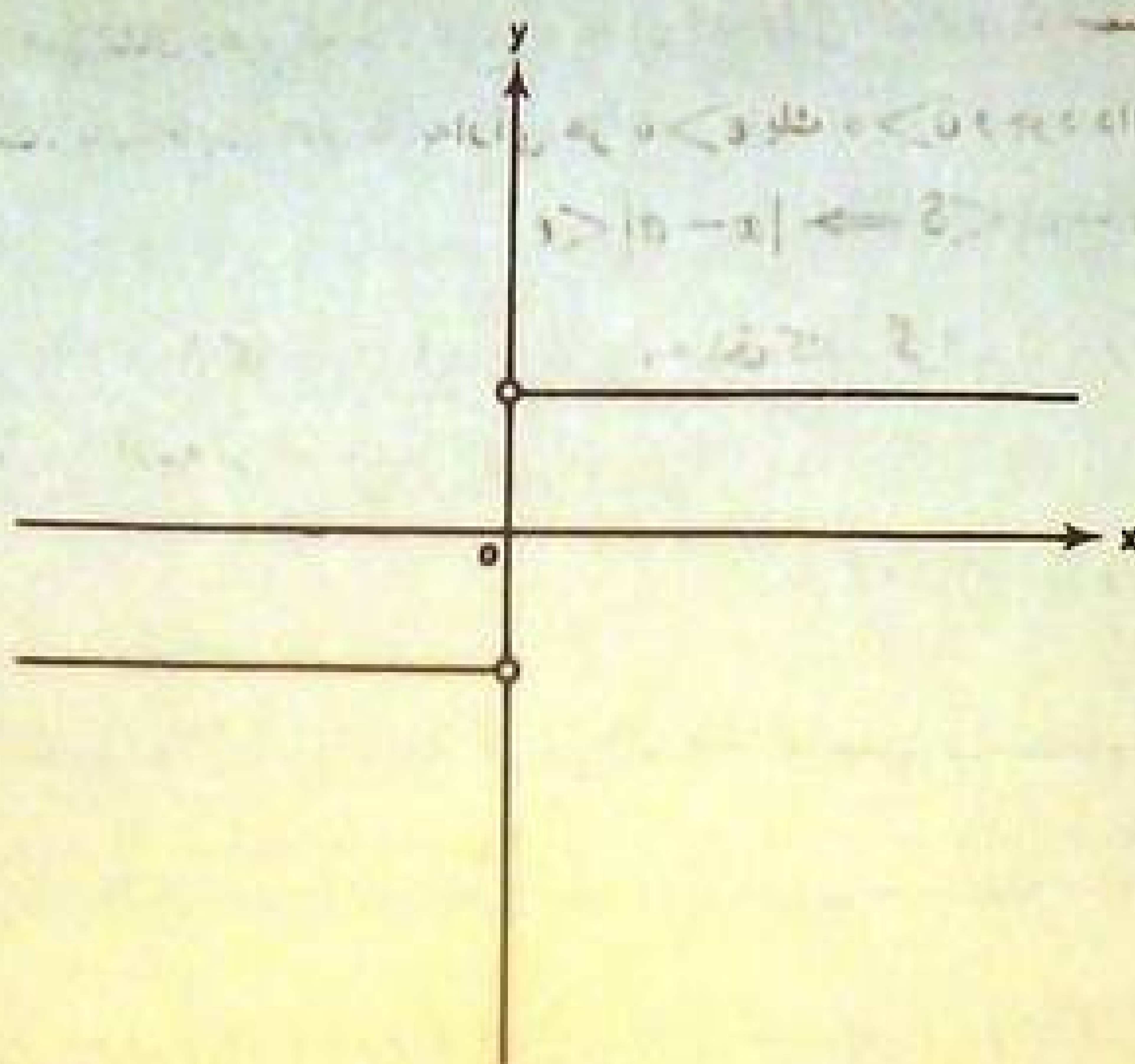
مثال ـ تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ را در نظر می گیریم، می‌خواهیم حد راست و حـد چپ f را وقتی x به سمت صفر میل کند (در صورت وجود) محاسبه‌کنیم. توجه می کنیم که:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x>0 \\ -1 & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

نمودار این تابع مطابق شکل صفحه بعد است.

چون مقادیر f برای هر $x>0$ عدد ثابت ۱ است پس حد راست تابع f در صفر عدد ۱ می‌باشد:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}=1$$



همچنین چون مقادیر f برای هر $x<0$ عدد ثابت ۱− است پس حد چپ f در صفر برابر ۱− می‌باشد:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

چون حد راست و حد چپ f در صفر با هم برابر نشدند پس f در صفر حد ندارد.

۴ـ قضایای حد

محاسبهٔ حد با استفاده از تعریف همواره کار ساده و راحتی نیست و معمولا هدف از تعیین حد توابع با استفاده از تعریف، درک بیشترمفهوم حد است و وقتی این درک ایجاد شد بهتر است از قضایای حدکه ما برخی از آنها را در زیر بدون اثبات بیان می کنیم استفاده کرد.

قضیه ـ فرض کنیدکه توابع f و g در نقطهٔ x_0 حد داشته و $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$. آنگاه:

(الف): تابع $f+g$ در x_0 حد داشته و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]=L_1+L_2$$

یعنی «حد مجموع دو تابع حددار مساوی است با مجموع حدهای آنها»

(ب): تابع $f-g$ در x_0 حد داشته و داریم:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ [f(x)-g(x)]=L_1-L_2$$

یعنی «حد تفاضل دو تابع حددار مساوی است با تفاضل حدهای آنها»

(ج): حاصلضرب $f\cdot g$ در x_0 حد داشته و داریم:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ [f(x)g(x)]=L_1\cdot L_2$$

یعنی «حد حاصلضرب دو تابع حددار مساوی است با حاصلضرب حدهای آنها».

(د): هرگاه L_2 مخالف صفر باشد خارج قسمت $\frac{f}{g}$ در x_0 حد داشته و داریم:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

یعنی «حد خارج قسمت دو تابع حددار مساوی است با خارج قسمت حد صورت به حد مخرج به شرط آن‌که حد مخرج مخالف صفر باشد».

تبصره ـ در قسمت‌های (الف) و (ج) فوق بجای دو تابع می‌توان تعداد با پایانی تابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ را در نظر گرفت و نتایجی نظیر آن به‌دست آورد.

اکنون به‌کمك قضیه و تبصرهٔ فوق حد چند تابع را به دست می‌آوریم.

قضیه ـ می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر عدد درست ومثبت n، حد تابع $f(x)=x^n$ وقتی x به سمت x_0 میل کند برابر x_0^n است. توجه می کنیم که x^n برابر حاصلضرب n تابع $f_1(x)=x, f_2(x)=x, \dots, f_n(x)=x$ است. اما طبق مثال ۵ همین فصل حد x وقتی به سمت x_0 میل کند همان x_0 است، پس حد هر یك از توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ وقتی x به‌سمت x_0 میل کند برابر x_0 است و حال بنا به قسمت (ج) قضیه و تبصره فوق داریم:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ x^n=\underbrace{(\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ x)\cdot(\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ x)\cdots(\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ x)}_{n\ \text{بار}}=\underbrace{x_0\cdot x_0\cdots x_0}_{n\ \text{بار}}=x_0^n=f(x_0)$$

قضیه ـ اگر c عددی ثابت و n عددی درست ومثبت باشد تابع $f(x)=cx^n$ در هر نقطه x_0 دارای حد است و حدش برابر cx_0^n می‌باشد. برای اثبات این مطلب فرض می کنیم $f_1(x)=c$ و $f_2(x)=x^n$. طبق مثال ۴ همین فصل و مثال بالا داریم:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f_1(x)=c \qquad \text{و} \qquad \underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f_2(x)=x_0^n$$

چون داریم $f=f_1\cdot f_2$ بنا به قسمت (ج) قضیه فوق می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=(\lim_{x\to x_0} f_1(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} f_2(x))=c\cdot x_0^n=cx_0^n=f(x_0)$$

قضیه ـ فرض کنید f یك تابع چند جمله‌ای باشد. یعنی f به‌صورت زیر تعریف شده باشد.

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

اگر تعریف کنیم $f_0(x)=a_0$ و $f_1(x)=a_1x$ و ... و $f_n(x)=a_nx^n$، آنگاه بنا به مثالهای قبل هر یك از آنها در هر نقطه مانند x_0 حد دارد و در نتیجه بنا به قسمت (الف) قضیه و تبصره فوق مجموع آنها، یعنی $f(x)$، در x_0 حد داشته و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=$$

$$\lim_{x\to x_0}(a_0)+\lim_{x\to x_0}(a_1x)+\cdots+\lim_{x\to x_0}(a_nx^n)=$$

$$a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=f(x_0)$$

مثال ۱ــ اگر $f(x)=x^5-11x^3+7x-4$، بنابه مثال ۳ داریم:

$$\lim_{x\to -1}(x^5-11x^3+7x-4)=(-1)^5-11(-1)^3+7(-1)-4=$$

$$-1+11-7-4=-1$$

مثال ۲ــ فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}$$

آنوقت بنا به قسمت (د) قضیهٔ صفحه قبل و مثال ۲ بالا، تابع f در هر نقطهٔ x_0 که به ازای آن مخرج مخالف صفر باشد دارای حد بوده و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} p(x)}{\lim_{x\to x_0} q(x)}=\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

به شرطی که $q(x_0)\neq 0$

به عنوان نمونه داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+1}{x^2+5}=\frac{8-4+1}{4+5}=\frac{5}{9}$$

مثال ۳ــ ثابت می‌کنند که توابع $\sin x$ و $\cos x$ درهر نقطهٔ $x_0\in R$ دارای حد هستند و

حد هر یك از آنها برابر مقدار آن تابع در x_0 است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

۵ـ حدهای بینهایت و حد در بینهایت

تعریف ـ فرض کنید که f در فاصلهٔ بازی که شامل x_0 است، مگر احیاناً در خود x_0، تعریف شده باشد. گفته می‌شود:

(الف): حد تابع f وقتی x بسمت x_0 میل کند $+\infty$ است هر گاه وقتی x به x_0 نزدیك شود (یعنی فاصله x و x_0 از هر عدد مثبتی کوچکتر شود و هیچگاه صفر نشود) مقادیر $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر شود. در این صورت می‌نویسند:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

(ب): حد تابع f وقتی x بسمت x_0 میل کند $-\infty$ است هر گاه وقتی x به x_0 نزدیك شود مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر شود. در این حالت می‌نویسند:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

(ج): حد تابع f وقتی x بسمت x_0 میل کند ∞ است هر گاه وقتی x به x_0 نزدیك شود مقادیر $|f(x)|$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر شود.

تبصره ۱ ـ این تعاریف را می‌توان بطور دقیق‌تر (نظیر آنچه که در تعریف شماره ۲ همین فصل دیده‌ایم) بیان کرد که ما در اینجا ذکر آن را لازم نمی‌دانیم.

تبصره ۲ ـ تعاریف (الف)، (ب) و (ج) را می‌توان در مورد حد چپ و حد راست در x_0 نیز مشابه با آنچه قبلا دیده‌ایم بیان کرد.

قضیه زیر را که کاربرد زیادی در تعیین حدهای بینهایت دارد بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0} \frac{a}{f(x)} = 0$$

تبصره: این قضیه را در مورد حد چپ و حد راست در x_0 نیز می‌توان بیان کرد.

مثال ۱ - تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم در زیر مقادیر $\frac{1}{x}$ به ازای برخی از مقادیر کوچک x داده شده‌اند.

x	۱	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	...
$\frac{1}{x}$	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...

x	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{10000}$	...
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000	-10000	...

از این جداول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست به صفر نزدیک شود $\frac{1}{x}$ از هر عدد مثبت و بزرگی بزرگتر شده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. همینطور وقتی که x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $\frac{1}{x}$ از هر عددمنفی کوچکی کوچکتر شده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

اگر قدر مطلق $\frac{1}{x}$ را در نظر بگیریم و x به صفر نزدیک شود، این قدر مطلق از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر می‌شود، در نتیجه $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\frac{1}{x}\right|=+\infty$

مثال ۲ - بنا به‌قضیه قبل حد تابع $\frac{1}{\cos^2 x}$ وقتی x به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل کند برابر $+\infty$ است، زیرا $\frac{1}{\cos^2 x}>0$ و

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 x=(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x)\cdot(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x)=0\times 0=0$$

اکنون حد در بینهایت را در نظر می‌گیریم.

تعریف:

(الف): فرض کنید که تابع f برای همهٔ مقادیر $x>a$ تعریف شده باشد. گفته می‌شود که وقتی x به سمت $+\infty$ میل کند $f(x)$ به سمت عدد L میل می کند هر گاه بتوان مقادیر $f(x)$ را هر چقدر که بخواهیم به L نزدیک سازیم مشروط بر آن که x از هر عدد بزرگی بزرگتر شود در این حالت می‌نویسند:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

(ب): فرض کنید که تابع f برای همهٔ مقادیر $x<a$ تعریف شده باشد. گفته می‌شود که حد تابع f وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل می کند عدد L است هر گاه بتوان مقادیر f را هر اندازه که بخواهیم به L نزدیک سازیم مشروط بر آنکه x از هرعدد منفی کوچکی کوچکتر شود. دراین حالت می‌نویسند:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

(ج): فرض کنید که تابع f برای مقادیر $x<a$ و مقادیر $x>a$ تعریف شده باشد. گفته می‌شود که حد تابع f وقتی x به سمت ∞ میل کند عدد L است و می‌نویسند:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

هر گاه بتوان مقادیر f را هر اندازه که بخواهیم به L نزدیک سازیم مشروط بر آن که قدر مطلق x از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر شود.

مثال ۱ - تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم. به آسانی می‌توان دید که:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

مثال ۲ - تابع $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

حال اگر $\frac{1}{x}$ را برابر t اختیار کنیم وقتی $x \to \infty$ آنوقت $t \to 0$ و در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{1-t}{1+2t} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}(1-t)}{\lim\limits_{t\to 0}(1+2t)} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره - این مثال نشان می‌دهد که با تعویض $\frac{1}{x}$ با t (یا x با $\frac{1}{t}$) بررسی حد در بینهایت به بررسی حد در صفر موکول می‌شود.

مثال ۳ - برای محاسبهٔ حد تابع $\sin\frac{1}{x}$ وقتی x به سمت ∞ میل کند، فرض می‌کنیم که $t = \frac{1}{x}$. حال وقتی $x \to \infty$ آنوقت $t \to 0$ پس:

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \sin t = \sin 0 = 0$$

حدهای نوع دیگری نیز وجود دارند که بطور خلاصه چنین‌اند:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$$

تعریف: فرض کنید که تابع f برای مقادیر $x > a$ تعریف شده باشد. گفته می‌شود که حد f وقتی x به سمت $+\infty$ میل کند $-\infty$ است و می‌نویسند:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

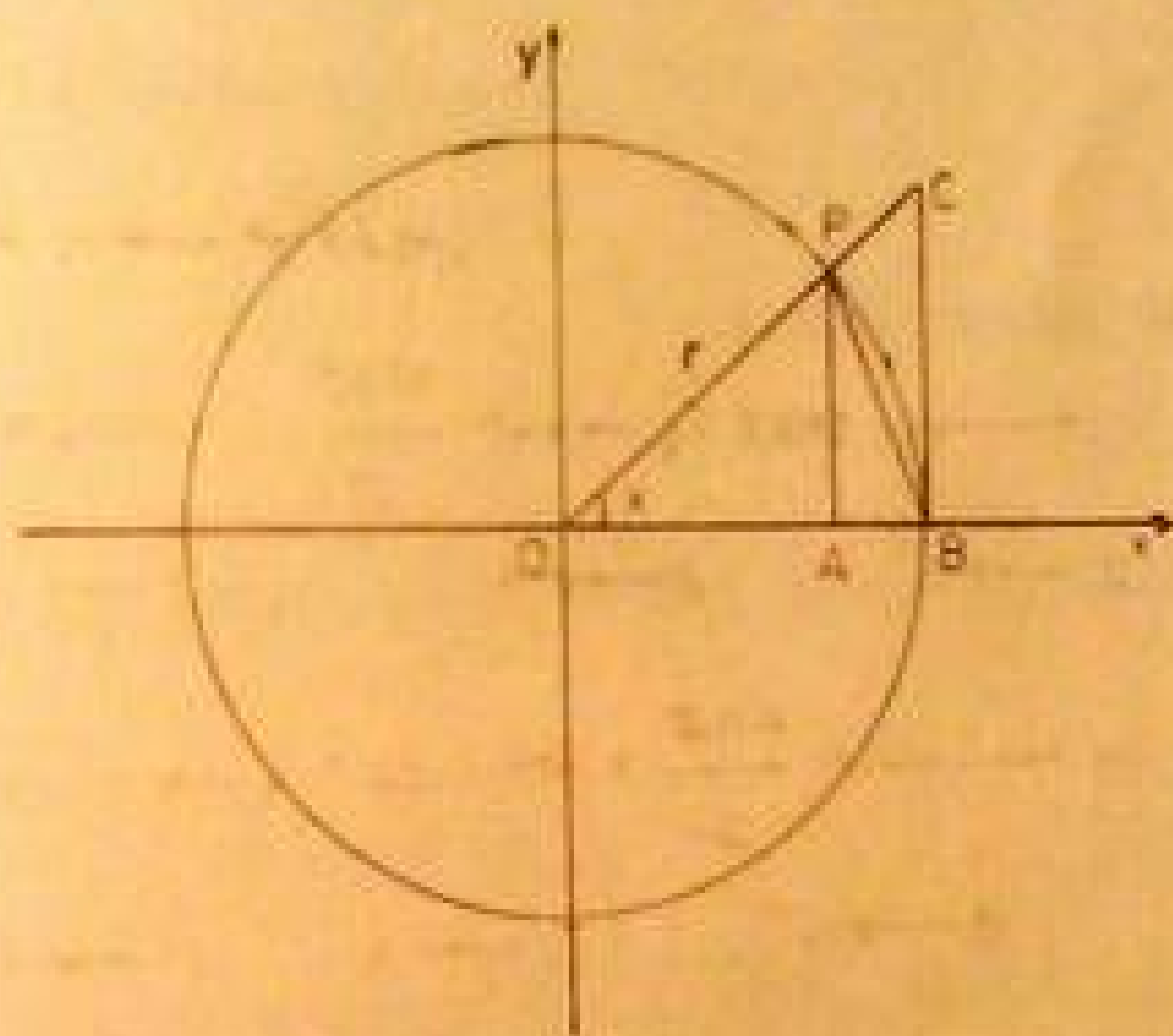
هرگاه بتوان مقادیر f را از هرعدد منفی کوچکی کوچکتر ساخت مشروط بر آنکه x از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر شود.

مثال - تابع $f(x) = -x^2$ وقتی که x به سمت $+\infty$ میل کند به سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.

۶ـ صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ و $\infty \times 0$

I حالت $\frac{0}{0}$ فرض کنید که صورت و مخرج کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که x به سمت a میل می کند به سمت صفر میل کند در این صورت کسر به صورت عبارت بی معنی $\frac{0}{0}$ درمی آید همانطور که خواهید دید این حد (که ظاهراً به شکل $\frac{0}{0}$ درآمده است) درمثالهای مختلف اعداد متفاوتی خواهد شد از این رو است که $\frac{0}{0}$ رایك صورت مبهم می گویند. درچنین مواردی حد را به روشها و تدابیر دیگری محاسبه می کنند که ما درزیر چند نمونهٔ آن را ارائه خواهیم کرد.

قضیه ــ اگر x به رادیان بیان شود، حد $\frac{\sin x}{x}$، وقتی $x \to 0$ ، برابر است با ۱.



اثبات ــ ابتدا فرض می کنیم که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ با توجه به شکل اگر BC در نقطه B بر دایره مماس و PA بر OB عمود و r شعاع دایره باشد داریم:

$$OPB \text{ مساحت مثلث} < OPB \text{ مساحت قطاع} < OBC \text{ مساحت مثلث}$$

چون $\frac{BC}{r} = \frac{BC}{OB} = \operatorname{tg} x$ بنابراین

$$OBC \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$$

$$OPB \text{ مساحت قطاع} = \frac{x}{2\pi} (\text{مساحت دایره}) = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{x r^2}{2}$$

$$OPB \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} OB \cdot PA = \frac{1}{2} r \cdot r \sin x = \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x > \frac{x r^2}{2} > \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

از ضرب هرسه قسمت در $\frac{2}{x^2}$ داریم :

$$tg\,x > x > \sin x$$

یا

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x$$

از ضرب در $\frac{1}{\sin x}$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1$$

از جبر می‌دانیم که اگر a و b اعداد مثبت بوده و $a>b$، آنگاه

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

چون $\frac{1}{\cos x}$ و $\frac{x}{\sin x}$ و ۱ بـرای $0<x<\frac{\pi}{2}$ اعداد مثبت هستند، از عکس کـردن آنها نتیجه

می‌گیریم که:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

با استفاده از قوانین حد بدست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x \leqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \leqslant \lim_{x\to 0^+} 1$$

حال چون $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ ، $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ بین این دو قرار دارد

بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

با درنظر گرفتن x بین ۰ و $-\frac{\pi}{2}$ وبکاربردن روشی شبیه به بالا بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

یکی از نتایج مستقیم قضیه فوق این است که

نتیجه : $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \text{(چرا؟)}$$

مثال۱- مطلوب است:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{x+a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}\frac{1}{x+a}$$

$$=1\times\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}$$

مثال۲- مطلوب است:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}x}{4x-\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}x}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x}=\frac{-\sqrt{2}}{4}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{4}\times1\times\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

مثال۳- مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to1}\frac{x^n-2x+1}{2x^2-3x+1}$. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{x^n-2x+1}{2x^2-3x+1}=\frac{(x^n-1)-2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)[(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-2]}{(x-1)(2x-1)}=\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-1}{2x-1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n}-2x+1}{2x^{2}-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-1}{2x-1}=n-2$$

مثال ۴ـ مطلوب است $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+12}+x}{x^{2}+2x-3}$ حد . اگر صورت را گویا کنیم ، به دست می آید:

$$\frac{\sqrt{x+12}+x}{x^{2}+2x-3}=\frac{(\sqrt{x+12}+x)(\sqrt{x+12}-x)}{(x^{2}+2x-3)(\sqrt{x+12}-x)}$$

$$=\frac{x+12-x^{2}}{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+12}-x)}=\frac{-(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+12}-x)}$$

$$=\frac{-(x-4)}{(x-1)(\sqrt{x+12}-x)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+12}+x}{x^{2}+2x-3}=\lim_{x\to -3}\frac{-(x-4)}{(x-1)(\sqrt{x+12}-x)}=-\frac{7}{24}$$

مثال ۵ـ مطلوب است $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt{3x-2}-1}$ حد . به ترتیب داریم:

$$\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt{3x-2}-1}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{3x+5}-2)\left(\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)(\sqrt{3x-2}+1)}{(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}+1)\left(\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)}$$

$$=\frac{[(3x+5)-8](\sqrt{3x-2}+1)}{[(3x-2)-1]\left(\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)}$$

$$=\frac{3(x-1)(\sqrt{3x-2}+1)}{3(x-1)\left(\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4\right)}=\frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt{3x-2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}+2\sqrt[3]{3x+5}+4}=\frac{1}{6}$$

II حالتهای $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty-\infty$ و $\infty\times 0$: گاهی اوقات در محاسبهٔ حد توابع $f\pm g$، $\frac{f}{g}$ و $f\cdot g$ این حالات پیش می‌آیند. در زیر به ذکر چند مثال و روش محاسبه حد در مورد آنها می‌پردازیم.

مثال ۱ - مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2-4x+5)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2-4x+5)=\lim_{x\to\pm\infty}x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2)=+\infty$$

بطور کلی، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی در چندجمله‌ای $f(x)$، مقدار x از لحاظ قدرمطلق به‌سمت بی‌نهایت میل کند، حد $f(x)$ برابراست با حد جمله‌ای که دارای بزرگترین درجه است.

مثال ۲ - مطلوب است $\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{2-x})$

جملهٔ با درجهٔ بزرگتر در این عبارت، همان $2x$ است (جملهٔ بعدی از درجهٔ $\frac{1}{2}$ است)، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{2-x})=\lim_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$$

تبصره - اگر چه در گذشته درجه را فقط برای یک چندجمله‌ای تعریف کرده بودیم ولی در اینجا از درجهٔ عبارت $\sqrt{2-x}$ صحبت به میان آوردیم. بطـور کلی تعریف مـی کنیم که درجهٔ عبارتی مانند $\sqrt[m]{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}$ که در آن $a_n\neq 0$ برابر است با $\frac{n}{m}$.

مثال ۳ - مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+4x-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+4x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=2$$

یعنی وقتی در تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$، صورت و مخرج هم درجه باشند، حد کسر، وقتی $x\to\pm\infty$ برابر است با نسبت ضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ صورت بر ضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ مخرج زیرا، در حالت کلی، اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای باشند داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$$

$$=\frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

در اینجا اگر x به‌سمت $\pm\infty$ میل کند تمام جمله‌های داخل پرانتزهای صورت و مخرج به‌سمت صفر میل می‌کند به جز a_n و b_m در نتیجه خواهیم داشت:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

$$=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m}\right)\qquad(1)$$

تبصره ــ تساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)$$

الف ــ اگر $n>m$، داریم:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)=\pm\infty$$

مثلا

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{x^3-2x+1}{x^2+x+5}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ x=\pm\infty$$

ب ــ اگر $m=n$، داریم:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\frac{a_n}{b_m}$$

مثلا

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-5x+7}{3x^2+6x+1}=\frac{2}{3}$$

ج- اگر $n<m$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m x^{m-n}}=0$$

مثلا

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x^2+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0$$

مثال ۴ - مطلوب است $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x}}{3x+\sqrt{3x-2}}$

جواب: $\frac{2}{3}$ (چرا؟)

مثال ۵ - مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x-1}\right)$

در اینجا، دو جملهٔ عبارت ، نه تنها از لحاظ درجه ، بلکه از لحاظ قدر مطلق ضریبها هم برابرند. دوحالت $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ را از هم جدا می کنیم. برای حالت اول داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x-1}\right)=+\infty$$

زیرا در این حالت، هردو جمله به سمت $+\infty$ میل می کنند. برای حالت دوم داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+3x-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right)}{x-\sqrt{x^2+3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳+\frac{۱}{x}}{۱+\sqrt{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۱}{x^۲}}}=\frac{-۳}{۲}$$

مثال۶ـ مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۱}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۱}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{x^۲-۱}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(۲+\frac{۱}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲+\frac{۱}{x}}{\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}}=۱$$

در این حالت، x مثبت است ($x\to+\infty$) و بنابراین $|x|=x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۱}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{x^۲-۱}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(۲+\frac{۱}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۱}{x}}{-\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}\right)}=-۱$$

در این حالت، x منفی است ($x\to-\infty$) و بنابراین $|x|=-x$.

مثال۷ـ مطلوبست $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{۱}{x}\right)x$

وقتی $x\to+\infty$ این تابع به‌صورت مبهم $\infty\times ۰$ در می‌آید (قبلا در این فصل دیدیم

که $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$). برای محاسبه این حد چنین می نویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}\right) x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

۷- پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع f را در نقطهٔ $x=a$ پیوسته گویند وقتی که:

اولا: $f(a)$، دارای معنا باشد (یعنی a در دامنهٔ تعریف تابع باشد).

ثانیاً: حد f، وقتی $x\to a$ ، وجود داشته و ضمناً برابر $f(a)$ باشد.

تابع $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=0$ ، ناپیوسته است، زیرا حد چپ و حد راست آن،وقتی $x\to 0$ ، با هم برابر نیستند . ($\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$)

تابع $f(x)=\frac{x^2-2}{x-2}$ در نقطهٔ $x=2$ ناپیوسته است، زیرا عدد ۲ در دامنهٔ تعریف تابع قرار ندارد اگر چه تابع در نقطه ۲ دارای حد است.

همانطور که در بخش چهارم این فصل دیدیم هر تابع چندجمله‌ای در هر نقطه دارای حد بوده و حدش برابر مقدار تابع در همان نقطه است لذا هر تابع چندجمله‌ای در هر نقطه پیوسته است. همچنین اگر $P(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، دیده‌ایم که $\frac{P(x)}{q(x)}$ در همهٔ نقاط مگر ریشه‌های مخرج دارای حدی مساوی مقدار تابع در آن نقطه بوده و لذا در آن نقاط پیوسته است.

تابع را در یک فاصله پیوسته نامند، اگر در همهٔ نقاط این فاصله پیوسته باشد. منظور از پیوستگی در یک نقطه انتهائی یک فاصله (درصورت وجود) پیوستگی از چپ یا راست (برحسب مورد) در آن نقطه می‌باشد.

مثلا تابع $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ در فاصلهٔ بستهٔ [۲ و $1\frac{1}{2}$] پیوسته و در فاصلهٔ] ۲ و $\frac{1}{2}$[یا فاصلهٔ] $\frac{1}{2}$ و ۱ – [ناپیوسته است. نقطه‌های ناپیوستگی این تابع عبارتند از $x=0$ و $x=1$ (چرا؟)

تمرین

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$$

هرکدام از حدهای زیر را پیداکنید:

۲ـ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$$

۳ـ $$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2-2}$$

۴ـ $$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$$

۵ـ $$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$$

۶ـ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

۷ـ $$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

۸ـ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^n+2x-3}{x^m+2x-3}$$

۹ـ $$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$$

۱۰ـ تابع $f(x)=x-[x]$ مفروض است $[x]$، یعنی قسمت درست x. نشان‌دهید که f در نقطهٔ $x=n$ (n عددی درست است)، دارای یک حد راست و یک حد چپ است. این حدها را مشخص کنید.

۱۱ـ تابع f به این ترتیب تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|} & (x\neq 0)\\ -1 & (x=0)\end{cases}$$

ثابت کنید که این تابع در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

۱۲- تابع f با ضابطهٔ زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+\dfrac{|x|}{x} & (x\neq ۰) \\ ۱ & (x=۰) \end{cases}$$

آیا این تابع در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

هر کدام از این حدها را پیدا کنید:

۱۳- $(m \text{ و } n\in Z ,\ n\neq ۰)$ ب) $\underset{x\to\pi}{\text{حد}} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ ، الف) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

۱۴- $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \dfrac{\cos x-\cos ۳x}{x^{۲}}$

۱۵- $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \dfrac{۱-\cos x^{۲}}{x^{۲}\sin x^{۲}}$

۱۶- $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \left(۲\,\text{cotg}\,۲x-\text{cotg}\,x\right)$

۱۷- $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \dfrac{۱-\sqrt{x+۱}}{x}$

۱۸- $\underset{x\to ۴}{\text{حد}} \dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

۱۹- $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱+\text{tg}\,x}-\sqrt{۱-\text{tg}\,x}}$

۲۰- $\underset{x\to ۵}{\text{حد}} \dfrac{\sqrt[۵]{۵x+۷}-۲}{x^{۲}-۷x+۱۰}$

۲۱- $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \dfrac{۲x^{۳}-۵x+۱}{x^{۳}-۷x^{۲}+۴}$

۲۲- $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \dfrac{۲x^{۵}-۷x^{۴}+۱۱x-۱}{x^{۳}+۲x^{۲}-۵x}$

۲۳- $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \dfrac{۷x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱}{x^{۴}+۲x^{۲}-۳x+۷}$

۲۴- $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \dfrac{x^{۲}+۱}{۴x^{۳}-۷x+۲}$

۲۵- $\underset{x\to-\infty}{\text{حد}} \dfrac{۲x-\sqrt{۱-x}}{۳x+\sqrt{۲-۳x}}$

۲۶- $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \left(x-\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}\right)$

-۲۷ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-x+1}\right)$

-۲۸ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+x^2-4}\right)$

-۲۹ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2-x+1}\right)$

-۳۰ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}\right)$

-۳۱ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\dfrac{\pi x}{2}$

-۳۲ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\,2x\,tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

-۳۳ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

فصل ۵

مشتق

۱ـ مقدمه

درنیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم دو مسئله ازدوشاخهٔ مختلف دانش، در برابر دانشمندان قرارداشت:

۱) تعیین سرعت حرکت غیر یکنواخت، در هر لحظهٔ دلخواه، وقتی که قانون حرکت معلوم باشد.

۲) تعیین مماس بر یک منحنی، در هر نقطهٔ دلخواه آن، وقتی که معادلهٔ منحنی معلوم باشد.

نیوتن، روی مسئلهٔ اول ولایب‌نیتز روی مسئلهٔ دوم کارمی کردند. معلوم شد که این دومسئله، در اساس متفاوت نیستند و به حل یک مسئلهٔ واحد، منجر می‌شوند.

این مسئلهٔ واحد، عبارت از این است که از روی تابع مفروض f، تابع دوم f'، که بعدها نام مشتق به خود گرفت، تعیین شود که سرعت یا نسبت تغییرات تابع f را نسبت به t، مشخص کند.

این مسئله، به‌صورت کلی خود، در سالهای ۷۰ و ۸۰ سدهٔ هفدهم، به‌وسیلهٔ نیوتن و لایب‌نیتز، پیشنهاد شد.

نیوتن ولایب‌نیتز و همراه آنها، ریاضی دانهای دیگری مثل فرما و پاسکال، تعریف کلی مشتق را پیدا کردند، مفهوم آن را گسترش دادند، محاسبهٔ آن را ساده‌کردند و راه کاربردآن رادر تعیین ماکزیمم ومینیمم و حدود وحل بسیاری ازمسئله‌های مربوط به هندسه و مکانیک، نشان‌دادند.

۲ـ نمو متغیر و نمو تابع

اگر $y=f(x)$ تابعی با دامنهٔ تعریف D_f و x_1 و x_2 دو مقدار متمایز از D_f باشند. تفاضل $\Delta x=x_2-x_1$ را نمو متغیر و تفاضل $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1$ را نمو نظیر تابع گویند.

نسبت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

را نرخ یا میزان یا نسبت متوسط تغییرات تابع نام گذاشته‌اند.

۲ـ مشتق یك تابع

اگر تابع $y=f(x)$، در فاصلهٔ باز (a, b) معین و x نقطه‌ای از این فاصله باشد، هر نمو Δx برای x، به قسمی که $x+\Delta x$ در این فاصله باشد، نموی مثل Δy برای y بدست می‌دهد:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

اگر نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، وقتی که Δx به سمت صفر میل می کند، دارای حدی باشد، این حد را بنا به تعریف، مشتق تابع در نقطهٔ x گویند و آن را به $f'(x)$ نشان می‌دهند:

$$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

به‌این‌ترتیب، تابعی بدست می‌آید که تابع مشتق نامیده می‌شود و آن را با یکی از علامتهای $f'(x)$، y'، یا $\frac{dy}{dx}$ نشان می‌دهند.

روشن است که مشتق تابع ثابت، برابر با صفر است.

مثال ۱ - مطلوب است محاسبهٔ $f'(x)$ و $f'(۳)$ برای تابع $y=f(x)=x^۲$

برای نمو Δx از متغیر x، به ترتیب داریم:

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^۲ \quad \text{و}$$
$$\Delta y = (x+\Delta x)^۲ - x^۲ = ۲x\cdot\Delta x + (\Delta x)^۲$$

نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲x\cdot\Delta x + (\Delta x)^۲}{\Delta x} = ۲x + \Delta x$$

و از آنجا:

$$y' = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} (۲x+\Delta x) = ۲x$$

به این ترتیب، مشتق تابع $y=x^۲$، عبارت است از تابع $y'=۲x$ و ضمناً این مشتق در نقطهٔ $x=۳$ برابر است با:

$$f'(۳) = ۲ \times ۳ = ۶$$

قضیه - اگر تابع f در نقطهٔ a مشتق پذیر باشد در این نقطهٔ پیوسته است.

مثال ۲ - با فرض $y=f(x)=\sqrt[۳]{x}$، مطلوب است $f'(x)$ و $f'(۰)$.

به‌ترتیب داریم:

$$y+\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}$$

و

$$\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

و بالاخره:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مشتق تابع $y=\sqrt[3]{x}$، عبارت است از تابع $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. به ازای $x=0$، عبارت $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ معنا ندارد. یعنی در نقطهٔ $x=0$، با وجودی که تابع پیوسته است، مشتق وجود ندارد.

۴- سرعت یك متحرك (تعبیر فیزیکی مشتق)

مثال ۱- فرض میکنیم که‌قانون حرکت متحرکی بامعادلهٔ $s=f(t)$، معین‌شده‌باشد(tنمایندهٔ زمان و s نمایندهٔ مسافتی است که طی شده است). اگراین متحرك درلحظه‌های t_1 و t_2، $t_1\neq t_2$ به ترتیب در فاصله‌های s_1 و s_2 از مبدأ قرار گرفته باشد:

$$s_1=f(t_1) \text{ و } s_2=f(t_2)$$

در این صورت t_2-t_1 را نمو t و s_2-s_1 را نمو s می‌نامند. نسبت نمو فاصله $\Delta s=s_2-s_1$ بر نمو زمان $\Delta t=t_2-t_1$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \qquad (1)$$

سرعت متوسط متحرك را در فاصلهٔ زمانی (t_1, t_2)، به دست می‌دهد.

روشن است که، وقتی حرکت یکنواخت نباشد، سرعت متوسط با سرعت متحرك در لحظهٔ $t=t_1$ تفاوت دارد، ولی هر چقدر که Δt کوچکتر شود، به همان اندازه به سرعت در لحظهٔ $t=t_1$، نزدیکتر می‌شویم. به‌این ترتیب، سرعت متحرك در لحظهٔ $t=t_1$ برابر است با حد نسبت $\frac{\Delta s}{\Delta t}$، وقتی که Δt به سمت صفر میل کند:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (2)$$

بنابرتعریف v را مشتق مسافت نسبت بهزمان دره $=t$ می نامند.

مثال۲– می‌دانیم که درسقوط آزاد ، معادله‌ای که مسافت طی شده‌را نسبت به‌زمان t ، بیان می کند، چنین است:

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

چون $t_2=t_1+\Delta t$ ، بنابراین:

$$\Delta s=s_2-s_1=\frac{1}{2}g(t_1+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_1^2=gt_1\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

و از آنجا:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=g\cdot t_1+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$$

و بنابراین، سرعت متحرك در لحظهٔ t_1 ، چنین می‌شود:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=g\cdot t_1 \qquad (4)$$

چون t_1 را نامشخص انتخاب کردیم، با حذف اندیس، به دست می آید:

$$v=g\cdot t \qquad (5)$$

می بینیم که سرعت نیز، مثل خود حرکت، تابع زمان است و ضمناً نوع این تابع، بستگی کامل به نوع تابع s دارد.

تمرین

حدهای زیررا محاسبه کنید، مشتق چه توابعی با تعریف محاسبه شده‌اند ؟

۱) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}$

۲) $\lim_{h\to 0}\frac{tg^2(x+h)-tg^2x}{h}$

۳) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

۴) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

۵ـ دستورهای کلی مربوط به محاسبهٔ مشتق

قضیه ـ مشتق مجموع دوتابع مشتق‌پذیر دریك فاصله، برابر است با مجموع مشتقهای آنها در این فاصله.

فرض می کنیم: $y=u+v$ ، به نحوی که u و v هر دو تابعهایی از x باشند. هر نمو Δx از متغیر x ، متناظر است با نموهای Δu برای u ، Δv برای v و Δy برای y:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$$

و

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

و بنابراین در حد داریم:

$$y'=u'+v'$$

قضیه - اگر u و v دو تابع مشتق‌پذیر در یک فاصله باشند، برای مشتق تابع $y=u\cdot v$ در این فاصله، داریم:

$$y'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

به ترتیب می نویسیم:

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-u\cdot v$$

$$=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

چون u و v را دو تابع مشتق پذیر فرض کردیم، در نتیجه پیوسته‌اند و وقتی Δx به سمت صفر میل کند، Δu و Δv هم به سمت صفر میل می کنند و به سادگی به دست می آید:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u'\cdot v+v'\cdot u$$

به همین نحو در حالت $y=u\cdot v\cdot w$ هم ثابت می‌شود:

$$y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$$

برای اثبات، کافی است تابع را به صورت $y=u(v\cdot w)$ بنویسیم و دستور مشتق گیری حاصل ضرب دو تابع را دوبار درمورد آن به‌کار بریم.

به طور کلی، و با روش استقرای ریاضی، می توان ثابت کرد که برای تابع:

$$y=u\cdot v\cdot w\cdots t$$

خواهیم داشت:

$$y'=u'\cdot v\cdot w\cdots t+u\cdot v'\cdot w\cdots t+\cdots+u\cdot v\cdot w\cdots t'$$

حالت خاص - وقتی که تابع به صورت $y=ku$ و k مقداری ثابت باشد، داریم: $y'=ku'$ (چرا؟)

قضیه - برای مشتق خارج قسمت دوتابع مشتق‌پذیر، یعنی $y=\frac{u}{v}$، داریم: (درصورتیکه y مشتق‌پذیر باشد).

$$y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

برای اثبات، رابطهٔ $y=\frac{u}{v}$ را به صورت $u=y\cdot v$ می‌نویسیم. از آنجا بنا بـه دستور مربوط به مشتق حاصل ضرب دو تابع داریم:

$$u'=v'\cdot y+y'\cdot v$$

که اگر معادله را نسبت به y' حل کنیم و به جـای y، مقدارش را قـرار دهیم، به دست می‌آید:

$$y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

۴) مشتق توان درست و مثبت یک تابع مشتق پذیر- برای تابع $y=u^m$ (m عددی درست و مثبت است)، ثابت می‌کنیم:

$$y'=mu'u^{m-1}$$

برای اثبات، از دستور مشتق‌گیری حاصل ضرب چند تابع استفاده می‌کنیم:

$$y=u^m=\underbrace{u\cdot u\cdots u}_{m\ \text{مرتبه}}$$

$$y'=u'\cdot\underbrace{u\cdot u\cdots u}_{m-1\ \text{مرتبه}}+u'\cdot\underbrace{u\cdot u\cdots u}_{m-1\ \text{مرتبه}}+\cdots+u'\cdot\underbrace{u\cdot u\cdots u}_{m-1\ \text{مرتبه}}$$

و چون تعداد جمله‌ها در این عبارت، برابر است با m، به دست می‌آید:

$$y'=mu'u^{m-1}$$

از آنجائیکه مشتق تابع $u(x)=x$ نسبت به x برابر ۱ است: در حالت خاص $y=x^m$، خواهیم داشت:

$$y'=mx^{m-1}$$

۵) مشتق توان گویای یک تابع مشتق پذیر - ثابت می‌کنیم که برای تابع $y=u^m$، وقتی که m عددی گویا باشد، باز هم همان دستور $y'=mu'u^{m-1}$ صحیح است.

حالت اول $m>0$: در این حالت فرض می‌کنیم $m=\frac{p}{q}$ (p و q دو عـددهایـی درست و

مشتند) و دوطرف رابطهٔ $y=u^{\frac{p}{q}}$ را به توان q می‌رسانیم:

$$y^q=u^p$$

از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$qy'y^{q-1}=pu'u^{p-1}$$

از آنجا:

$$y'=\frac{p}{q}\cdot\frac{u'\cdot u^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{u'\cdot u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}}$$

و یا بعد ازساده کردن:

$$y'=\frac{p}{q}u'\cdot u^{\frac{p}{q}-1}=mu'\cdot u^{m-1}$$

حالت دوم $m<0$: در این حالت فرض می‌کنیم $m=-n$ (n عددی مثبت است):

$$y=u^m=u^{-n}=\frac{1}{u^n}$$

و از آنجا:

$$u^n\cdot y=1$$

با مشتق گرفتن از دو طرف تساوی به دست می‌آید:

$$nu'\cdot u^{n-1}\cdot y+u^n\cdot y'=0$$

معادله را نسبت به y' حل می‌کنیم و به جای y، مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{-nu'y}{u}=\frac{-nu'}{u^{n+1}}=\frac{mu'}{u^{1-m}}=mu'\cdot u^{m-1}$$

به این ترتیب اگر m عددی گویا باشد، در هر حال برای تابع $y=u^m$ داریم:

$$y'=mu'u^{m-1}$$

مثال ۱ - مطلوب است مشتق تابع $y=\sqrt{x}$.

$$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال ۲ - مطلوب است مشتق تابع $y=\sqrt[n]{u}$.

$$y=\sqrt[n]{u}=u^{\frac{1}{n}}$$

$$y' = \frac{1}{n}u' \cdot u^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}u' \cdot u^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

۶) مشتق تابع تابع (تابع مرکب) ـ اگر داشته باشیم:

$$y = f(u) \text{ و } u = \varphi(x)$$

که در آن φ تابع مشتق پذیری از x و f تابع مشتق پذیری از u باشند، برای هرنمو Δx از متغیر x ، نموهای:

$$\Delta u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

و

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

بدست می‌آیند.

با فرض $\Delta u \neq 0$ و $\Delta x \neq 0$ ، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

چون تابعهای φ و f مشتق‌پذیرند خواهیم داشت:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x = \varphi'(x) \text{ و } \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

و در نتیجه:

$$y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ یا } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

مثال- مطلوبست مشتق تابع $y = \sqrt[n]{u^m}$.

فرض کنیم $v = u^m$ آنگاه، داریم:

$$y = \sqrt[n]{v}$$

و

$$y'_v = \frac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}} \text{ و } v'_x = mu'u^{m-1}$$

$$y'_x = y'_v \cdot v'_x = \frac{mu'u^{m-1}}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}$$

که اگر به جای v ، مقدارش u^m را قرار دهیم، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید.

$$y'_x = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

این فرمول به صورت زیر خواهد بود:

$$y'_{\circ} = \frac{m}{n} u' \sqrt[n]{u^{m-n}}$$

۷) مشتق تابعهای مثلثاتی:

الف) مشتق $y = \sin x$ ، به ترتیب داریم:

و

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \quad \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

و چون داریم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1$$

بنابراین:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

در حالت $y = \sin u$ ، بنا به دستور مشتق‌گیری از تابع مرکب ، داریم : $y' = u' \cdot \cos u$.

ب) مشتق $y = \cos x$ ، می‌نویسیم:

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

و روشن است که برای حالت $y = \cos u$ داریم:

$$y' = -u' \sin u$$

ج) مشتق $y = tg\,x$ ، می‌نویسیم:

$$y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

بنا به دستور مشتق‌گیری از نسبت دو تابع، به دست می‌آید:

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

و برای $y=tg u$ داریم: $y'=u'(1+tg^2 u)$.

به همین ترتیب، برای $y=cotg x$ ، ثابت می‌شود: $y'=-(1+cotg^2 x)$.

۸ـ مشتقهای پی در پی تابع $y=f(x)$.

مشتق $f(x)$ ، یعنی $y'=f'(x)$ ، خود تابعی از x است که مشتق آن (در صورت وجود)، مشتق مرتبهٔ دوم تابع $f(x)$ نامیده می‌شود. به همین ترتیب می‌توان مشتق مرتبهٔ سوم، مرتبهٔ چهارم و بالاخره مرتبهٔ n ام را (در صورت وجود) به دست آورد. مشتق مرتبهٔ دوم را با $f''(x)$ یا y''، مشتق مرتبهٔ سوم را با $f'''(x)$ یا y''' ، مشتق مرتبهٔ چهارم را با $f^{(4)}(x)$ یا $y^{(4)}$ و بالاخره مشتق مرتبهٔ n ام را با $f^{(n)}(x)$ یا $y^{(n)}$ ، نشان می‌دهند.

مثال ۱ ــ برای $y=x^2$ داریم:

$$y'=2x$$
$$y''=2$$

و

$$y'''=y^{(4)}=\cdots=y^{(n)}=0$$

مثال ۲ ــ برای $y=\sin x$ داریم:

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال ۳ ــ برای $y=\frac{1}{1-x}$ داریم:

$$y'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

و

$$y''=\frac{1\times 2}{(1-x)^3}$$

و

$$y'''=\frac{1\times 2\times 3}{(1-x)^4}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$y^{(n)}=\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{(1-x)^{n+1}}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(حاصلضرب n عدد طبیعی از ۱ تا n را به صورت $n!$ نشان داده آنرا فاکتوریل n می‌خوانیم)
$(1\times 2\times 3\times \cdots \times n = n!)$

تمرین

مشتق هر کدام از تابعهای زیر را پیدا کنید:

۱- $y = -2x^3 + 6x - 5$

۲- $y = 3x^4 - 12x^2 + 7$

۳- $y = \dfrac{5x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{11}$

۴- $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{7}}$

۵- $y = (2x+1)^3 - x^2(x+1)$

۶- $y = (x+1)^5(x-1)^3$

۷- $y = (x^3 - 1)(x^4 - 2x^2 + 3)$

۸- $y = (3x-5)^4(7x+2)^2$

۹- $y = x^5(x^2-1)^3(x^2+1)^2$

۱۰- $y = x^5(x-1)^4(x+1)^3$

۱۱- مطلوب است محاسبهٔ $f'(0)$، به شرطی که داشته باشیم:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$$

۱۲- چندجمله‌ای $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ را در نظر می گیریم. مقدار خود تابع و مشتقهای پی در پی آن را به ازای $x = 0$ حساب کنید و نشان دهید که چند جمله‌ای مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1\times 2}f''(0) + \frac{x^3}{1\times 2\times 3}f'''(0)$$

۱۳- مشتق تابع $f(x) = |1 - x^2|$ را حساب کنید و $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f'(2)$ را پیدا کنید. در کدام نقاط، مشتق وجود ندارد؟

مشتق هریك از تابعهای زیر را پیدا کنید:

۱۴- $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

۱۵- $y = \dfrac{3x+2}{5x-1}$

۱۶- $y = \dfrac{(x-1)^2}{2x-3}$

۱۷- $y = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

۱۸- $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x - 4}$

۱۹- $y = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 - 1}$

۲۰- $y = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}$

۲۱- $y = \dfrac{2x^7 - 1}{5x^7 + 3}$

۲۲− $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ ‏ ۲۳− $y=\dfrac{x-1}{x^2(x+1)^5}$

۲۴− در مورد تابع $y=\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}$ ثابت کنید که حاصل عبارت زیر مقدار ثابتی است.

$$\frac{2y'^2-yy''}{y^2}$$

مشتق هریک از تابعهای زیر را پیدا کنید:

۲۵− $y=\sqrt{3x-1}$ ‏ ۲۶− $y=\sqrt{x^2-4x}$

۲۷− $y=x-1+\sqrt{2x+1}$ ‏ ۲۸− $y=\sqrt{x^2+2x}$

۲۹− $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x+2}$ ‏ ۳۰− $y=\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+1}}$

۳۱− $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ‏ ۳۲− $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

۳۳− اگر y' و y'' به ترتیب مشتقهای اول و دوم تابع $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ باشند، ثابت کنید:

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

۳۴− ثابت کنید بین تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ و مشتقهای اول و دوم آن، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$yy''-3y'^2+y^4=0$$

۳۵− عددهای A ، B و C را طوری پیدا کنید که برای همهٔ مقادیر حقیقی x داشته باشیم:

$$\frac{x^2-4x+6}{x^2-3x+2}=A+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{2-x}$$

و از آنجا چهار مشتق اولهٔ تابع $y=\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-3x+2}$ را پیدا کنید.

مشتق هر یك از تابعهای زیر را پیدا کنید:

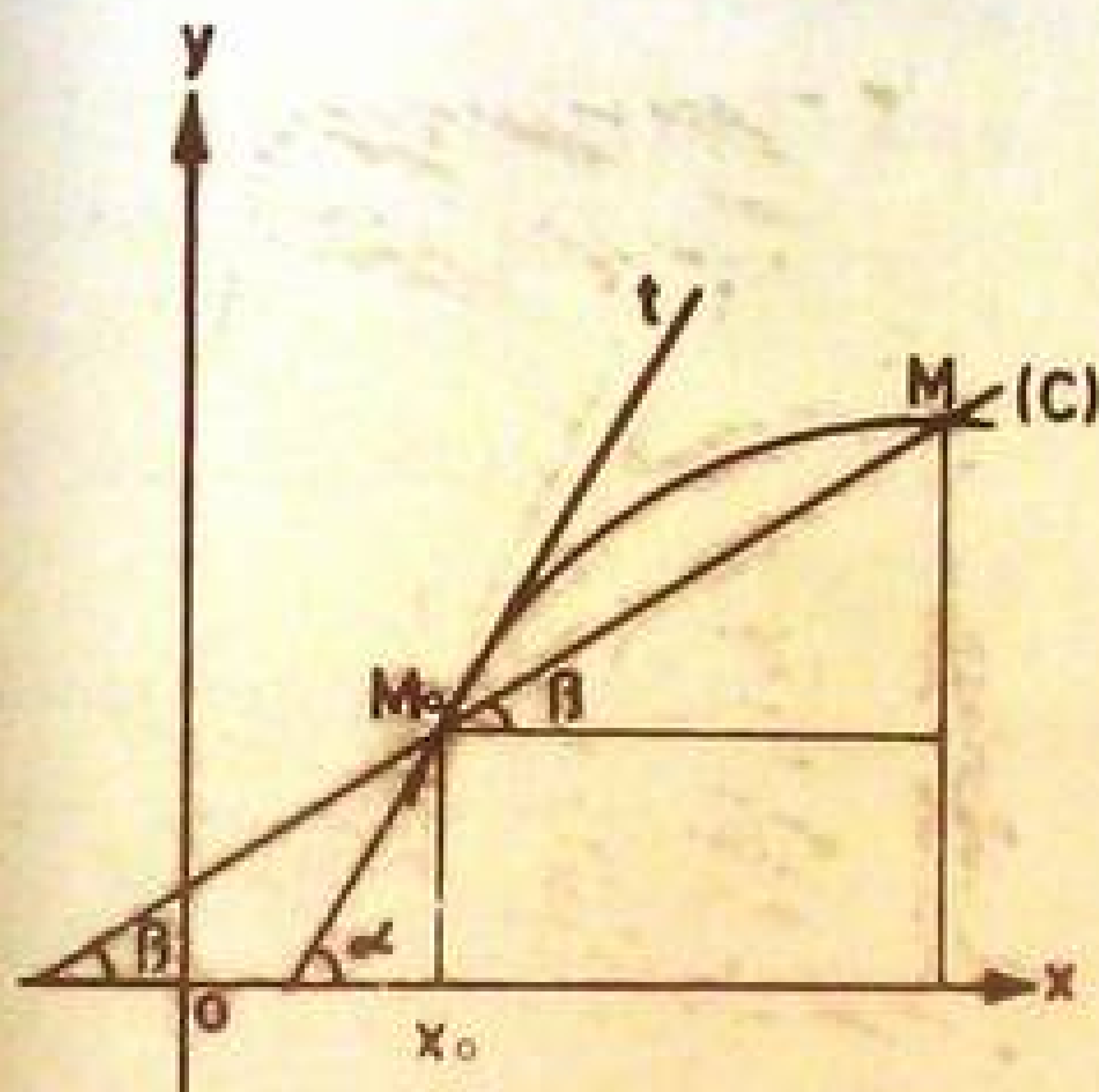
۳۶− $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ ‏ ۳۷− $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

۳۸− $y=\dfrac{1}{a\sin x+b\cos x}$ ‏ ۳۹− $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

فصل ۶

کاربرد مشتق

۱- تعبیر هندسی مشتق - ضریب زاویه خط مماس برمنحنی



اگر (c)، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$، $M_{\circ}$ نقطه‌ای از (c) به مختصات $(x_{\circ}, y_{\circ})$، M نقطهٔ دیگری از آن بمختصات $(x_{\circ}+\Delta x, y_{\circ}+\Delta y)$ باشد، روشن است که نسبت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{\circ}+\Delta x)-f(x_{\circ})}{\Delta x}$$

برابر است با ضریب زاویهٔ خط $M_{\circ}M$. اگر f در نقطه $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، وقتی که $\Delta x\to \circ$، نقطهٔ M به سمت $M_{\circ}$ و خط قاطع $M_{\circ}M$ به سمت خط $M_{\circ}t$ و نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به سمت $f'(x_{\circ})$ میل می کند. بنا به تعریف خط $M_{\circ}t$ را خط مماس بر (c) در نقطهٔ $M_{\circ}$ می‌نامند. اگر زاویهٔ بین Ox و $M_{\circ}t$ را α بنامیم، خواهیم داشت:

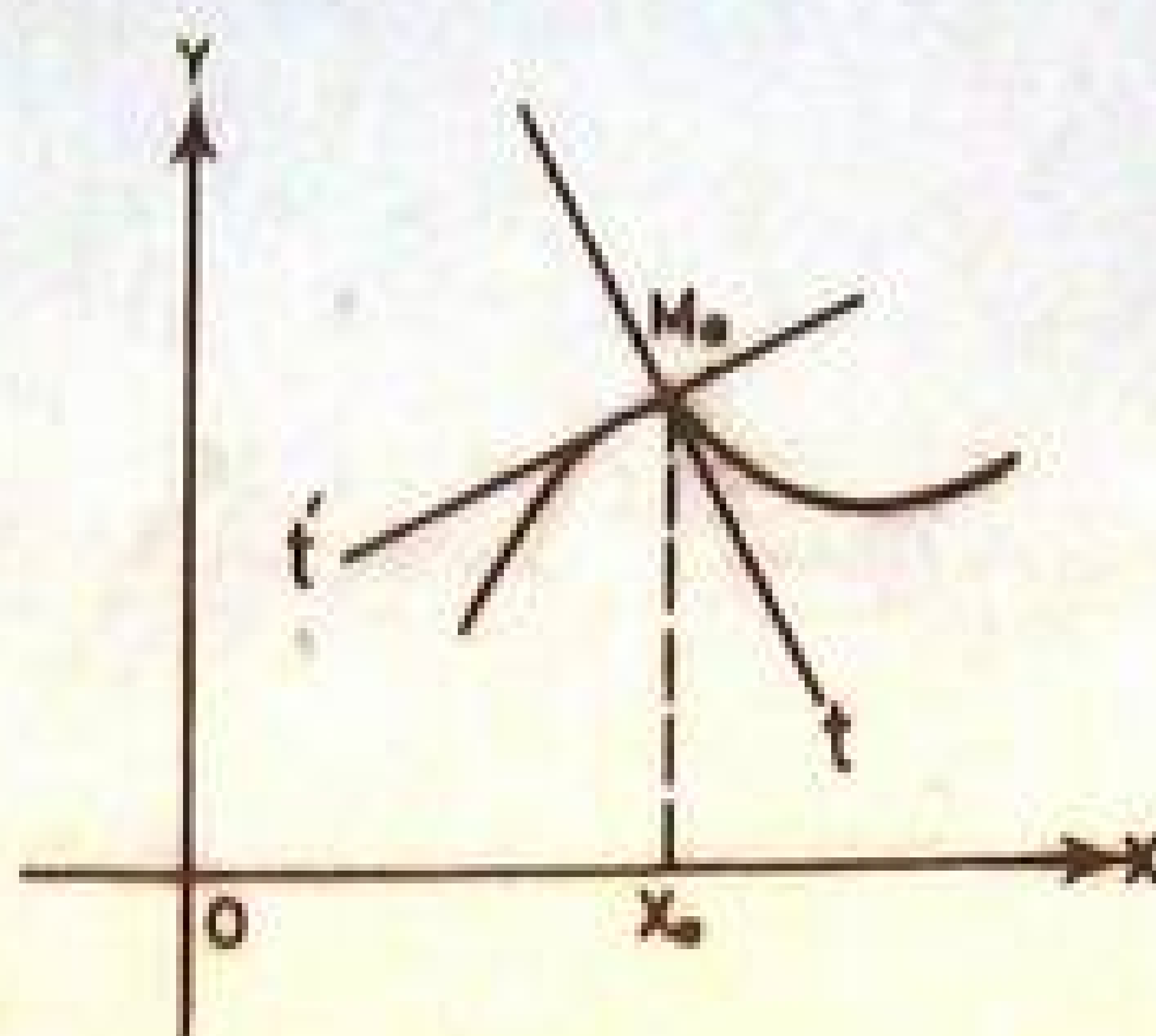
$$M_{\circ}t \text{ ضریب زاویه } = tg\alpha = f'(x_{\circ})$$

بنابراین مشتق تابع f، در نقطهٔ $x_{\circ}$، برابر است با ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ به طول $x_{\circ}$.

یادآوری ۱ - وجود مشتق f در نقطهٔ $x_{\circ}$، هم‌ارز است با وجود مماس برمنحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ به طول $x_{\circ}$.

یادآوری ۲ - ممکن است پیش آید که وقتی x از میان مقادیر بزرگتر از $x_{\circ}$ یا از میان مقادیر کوچکتر از $x_{\circ}$ به سمت $x_{\circ}$ میل می کند، $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ دارای دو حد متفاوت باشد. در این حالت یک مشتق راست و یک مشتق چپ و در نتیجه، دونیم خط مماس $M_{\circ}t$ و $M_{\circ}t'$ را خواهیم داشت، وقتی که نقطهٔ $M_{\circ}$ دارای این خاصیت باشد، گویند منحنی در نقطهٔ $M_{\circ}$ شکسته است. در خود

نقطهٔ M_0 ، مشتق وجود ندارد . نقطهٔ M_0 را نقطهٔ زاویه‌دار می‌نامند .



مثال - ضریب زاویه مماس بر منحنی $y=x^2+2x-1$ را در نقطه‌ای بطول -3 بدست آورید.

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$y'=f'(x)=2x+2$$

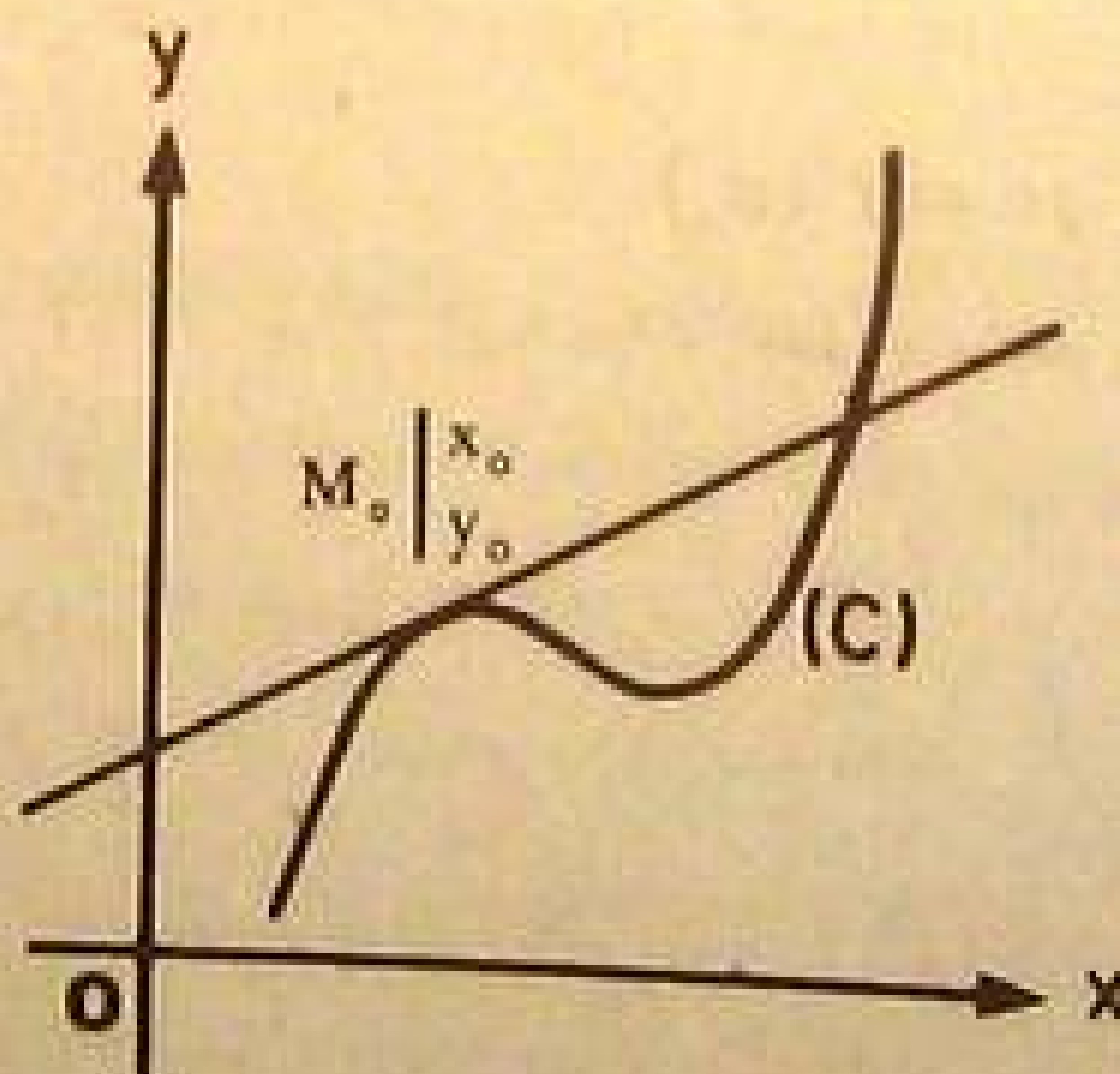
طبق آنچه گفته شد:

$$m_{\text{مماس}}=f'(x_0)=f'(-3)=2(-3)+2=-4$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع برمنحنی

معادلهٔ خط مماس بر منحنی c نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ درنقطهٔ M_0 به طول x_0 که روی منحنی واقع است به صورت زیر است:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$



که $f(x_0)$ عرض نقطهٔ تماس و $f'(x_0)$ ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی در M_0 است.

مثال ۱ - مطلوب است معادلهٔ خط مماس، بر منحنی تابع $f(x)=-x^2+2x+3$؛ در نقطه‌ای از آن که طولی برابر با ۲ دارد.

عرض نقطهٔ تماس به سادگی به دست می‌آید:

$$f(2)=-4+4+3=3$$

برای پیدا کردن ضریب زاویهٔ مماس، مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-2x+2$$

اگر ضریب زاویهٔ مماس در نقطهٔ به طول ۲ را، m بگیریم، داریم:

$$m=f'(2)=-4+2=-2$$

با در دست داشتن ضریب زاویه و یکی از نقطه‌های خط مماس، معادلهٔ آن به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$y-3=-2(x-2) \Longrightarrow y=-2x+7$$

مثال ۲ - نقطه‌هایی از منحنی $y=\frac{x-3}{x-1}$ را پیدا کنید که مماس در آنها بر منحنی، موازی خط $y=\frac{x}{2}$ باشد.

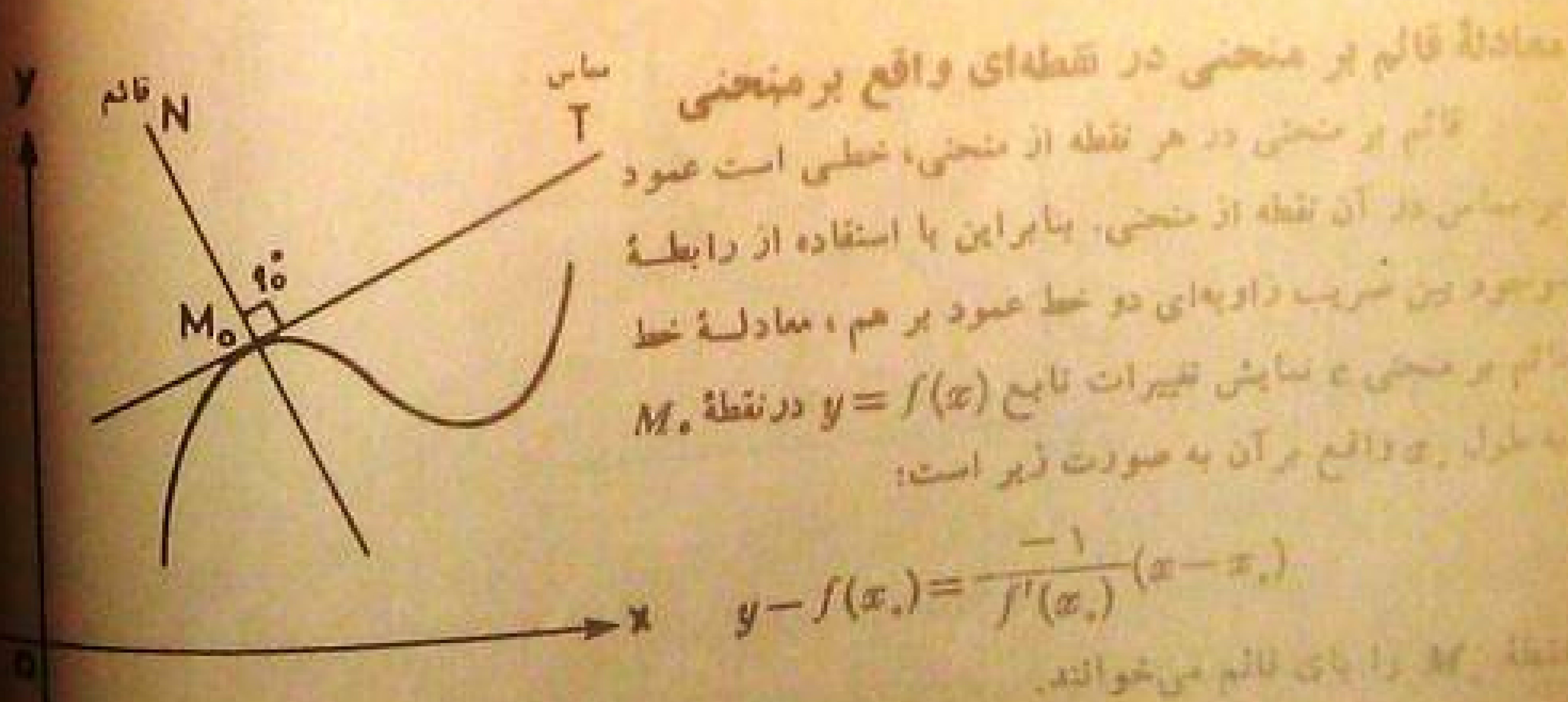
در اینجا، ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ x_0 برابر $\frac{1}{2}$ است، از آنجا:

$$f'(x_0)=\frac{2}{(x_0-1)^2}=\frac{1}{2}$$

که از آنجا برای x_0 دو مقدار ۱− و ۳ به دست می‌آید. به این ترتیب نقطه‌های مورد نظر عبارتند از:

$$A\left|\begin{matrix}-1\\ f(-1)=2\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad B\left|\begin{matrix}3\\ f(3)=0\end{matrix}\right.$$

معادلهٔ قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر منحنی



قائم بر منحنی در هر نقطه از منحنی، خطی است عمود بر مماس در آن نقطه از منحنی، بنابراین با استفاده از رابطهٔ موجود بین ضریب زاویه‌ای دو خط عمود بر هم، معادلهٔ خط قائم بر منحنی c نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ M_0 به طول x_0 واقع بر آن به صورت زیر است:

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

نقطهٔ M_0 را پای قائم می‌خوانند.

مثال ۱ – مطلوب است معادلهٔ قائم بر منحنی $y=\frac{3x-1}{x+1}$ ، در نقطهٔ به طول $x_0=3$.

گفتیم کـه قائم بر منحنی در نقطهٔ M_0 ، به خطی گفته می‌شود که از M_0 بگذرد و بر مماس در نقطهٔ M_0 بر منحنی، عمود باشد.

مختصات پای قائم، با در دست داشتن طول آن $x_0=3$ ، به سادگی به دست می‌آید:

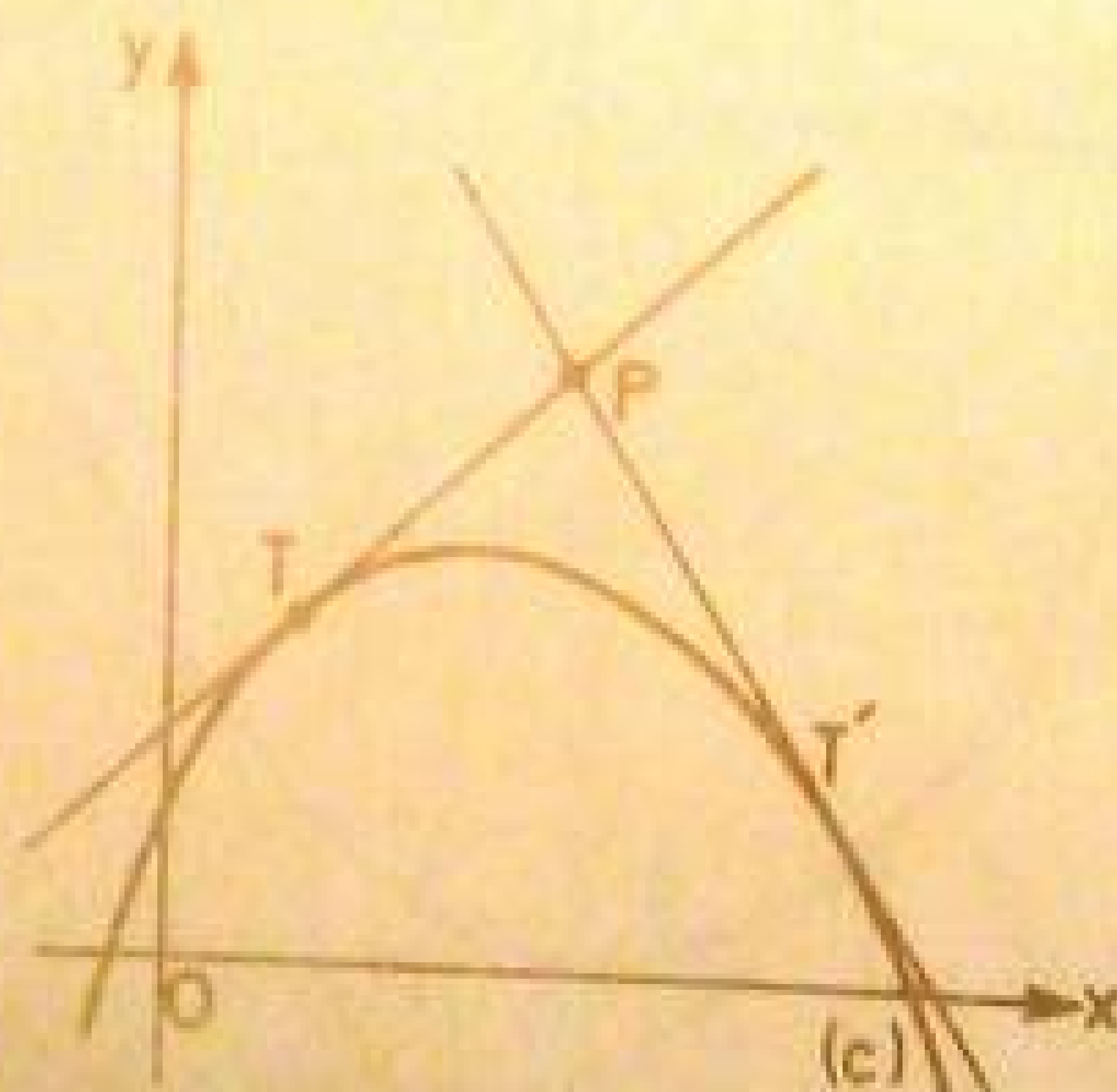
$$y_{M_0}=f(3)=\frac{9-1}{3+1}=2 \quad \text{و} \quad M_0\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$

مشتق تابع $y'=\frac{4}{(x+1)^2}$ و بنابراین ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ M_0 برابر است با $f'(3)=\frac{1}{4}$. چون خط قائم بر خط مماس عمود است، ضریب زاویهٔ آن برابر -4 می‌شود و از آنجا به سادگی می‌توان معادلهٔ خط قائم را پیدا کرد:

$$y-2=-4(x-3) \Longrightarrow y=-4x+14$$

تعیین معادلهٔ خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای واقع در خارج منحنی

میخواهیم معادلهٔ مماسهایی را که از نقطه $P(a, b)$ واقع در خارج منحنی، نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ بر این منحنی رسم میشود بنویسیم.



راه اول – طول نقطهٔ تماس را x_0 اختیار می‌کنیم، در اینصورت معادلهٔ خط مماس بر منحنی در این نقطه همانطوریکه دیدیم بصورت: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ خواهد بود.

برای اینکه این خط مماس از نقطهٔ P بگذرد لازم و کافیست که مختصات P در معادلهٔ آن صدق کند یعنی داشته باشیم:

$$b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0)$$

از حل معادلهٔ اخیر x_0 طول نقطه تماس و از روی آن معادله خطوط مماس بدست می‌آید.

مثال - از نقطه $P(1,-2)$ مماسهایی بر منحنی تابع $y=\frac{1}{4}x^2$ رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این مماسها را پیداکنید.

حل- اگر طول نقطهٔ تماس را x_0 بگیریم خواهیم داشت:

$$m=f'(x_0)=\frac{x_0}{2} \text{ مماس در } T \text{ و } T\left(x_0, \frac{x_0^2}{4}\right) \text{ نقطهٔ تماس}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بصورت $y-\frac{x_0^2}{4}=\frac{x_0}{2}(x-x_0)$ خواهد بود. این خط بنابفرض مسئله باید ازنقطه $P(1,-2)$ بگذرد لذا مختصات این نقطه در معادله خط باید صدق کند.

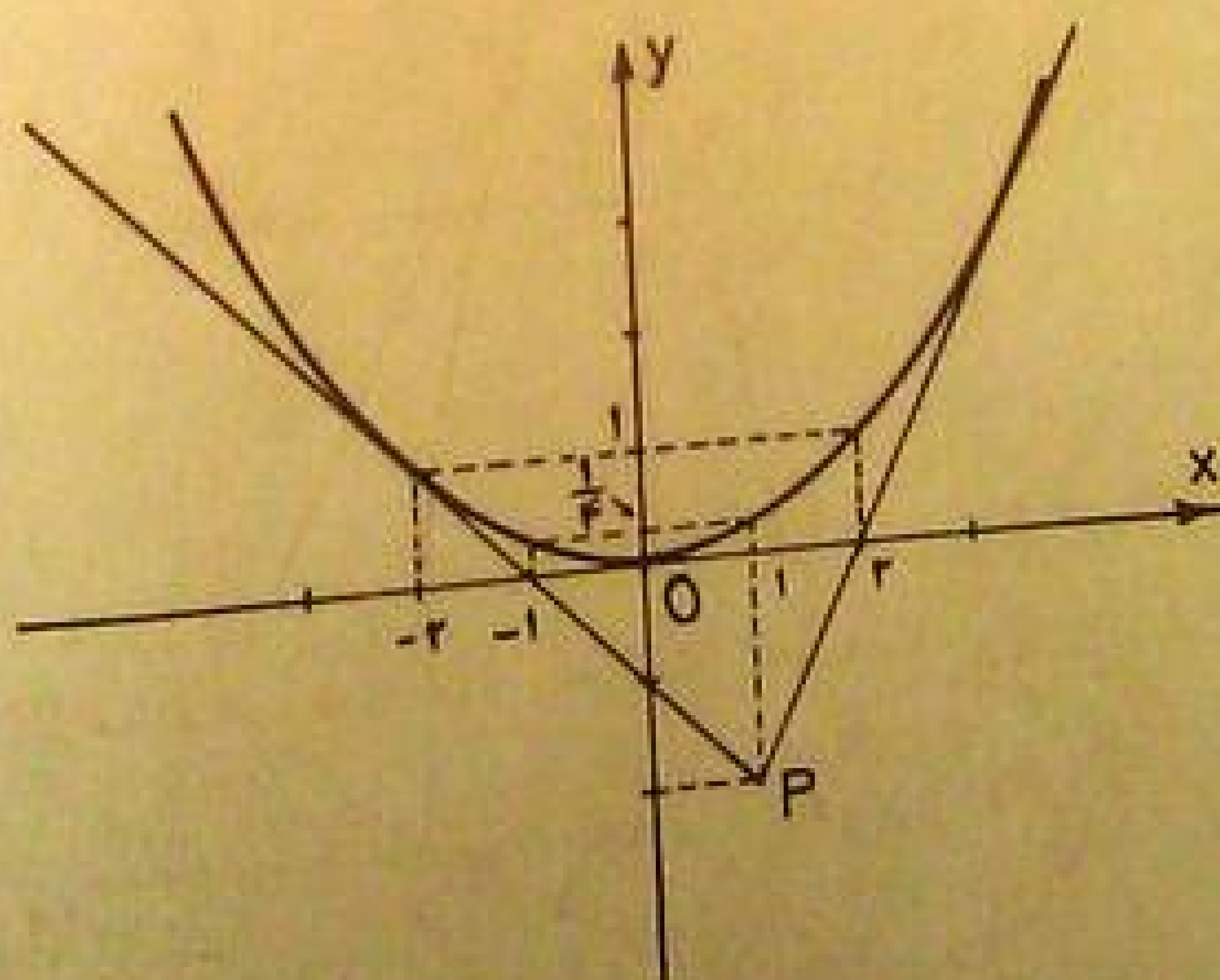
$$-2-\frac{x_0^2}{4}=\frac{x_0}{2}(1-x_0) \Longrightarrow x_0^2-2x_0-8=0$$

این معادله دو جواب دارد یعنی از نقطه P دو مماس بر منحنی می‌توان رسم کرد:

$$\Longrightarrow x_0=4 \text{ و } x_0=-2 \Longrightarrow$$

و معادله این دو مماس به سادگی بدست می‌آید:

$$y=-x-1 \quad \text{و} \quad y=2x-4$$



راه دوم - معادلهٔ خطی راکه از نقطه $P(a,b)$ با ضریب زاویهٔ غیرمشخص m گذشته می‌نویسیم و با معادله منحنی قطع میدهیم تا معادلهٔ طولهای نقاط تلاقی بدست آید.

$$\begin{cases} y-b=m(x-a) \\ y=f(x) \end{cases} \Longrightarrow f(x)-b=m(x-a)$$

آنگاه شرطی را می‌نویسیم که این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد (شرط مماس بودن خط و منحنی)، ازآنجا ضریب زاویه خطوط مماس وازروی‌آنها معادلات خطوط‌مماس مشخص‌میگردد.

مثال - معادلهٔ خطوطی را بنویسید که از نقطه $P(0, 7)$. مماس بر منحنی تابع $y=-x^2+2x+3$ رسم میشوند.

حل - بترتیب زیر عمل میکنیم:

$$y-7=m(x-0) \Longrightarrow y=mx+7$$

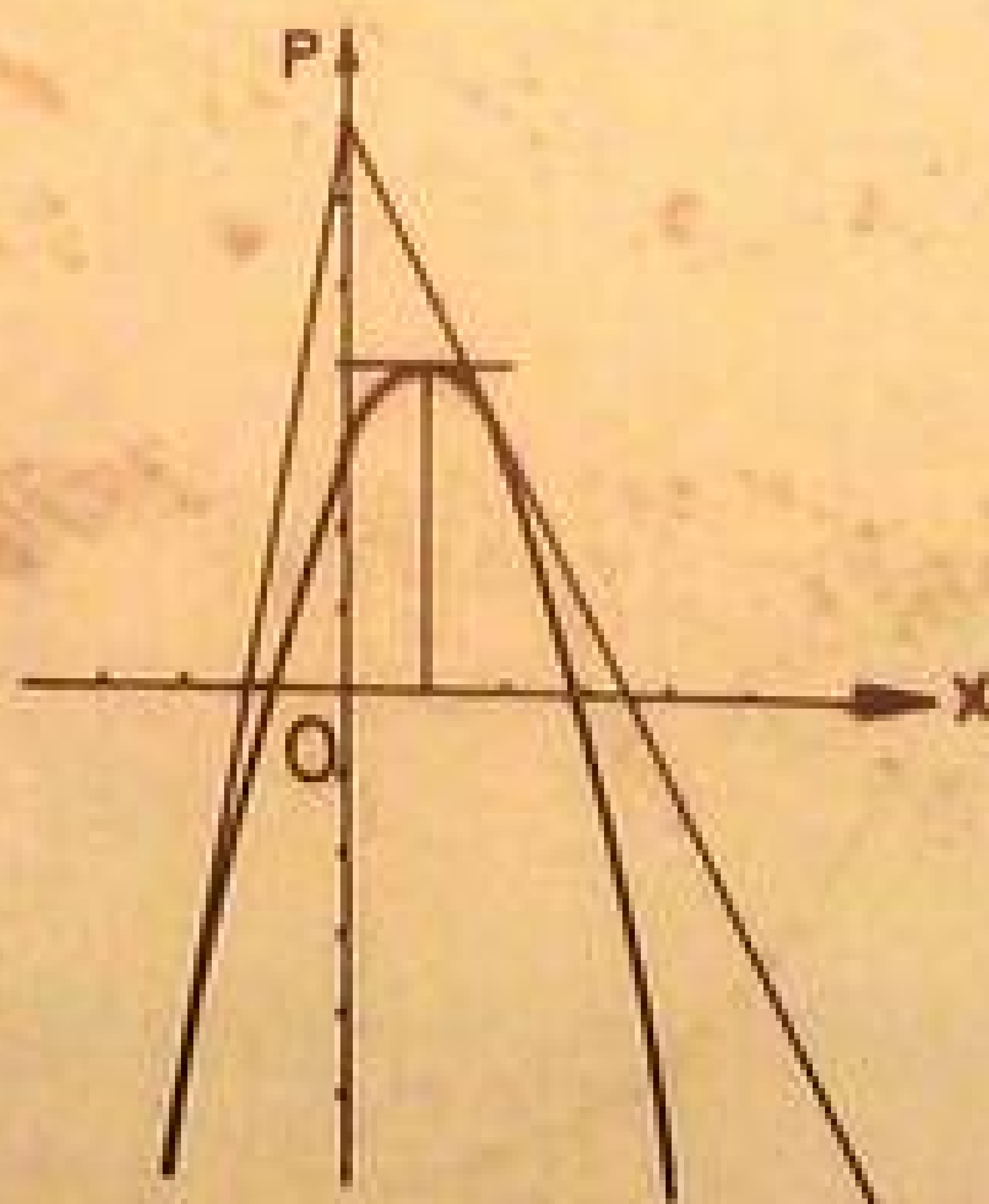
$$\begin{cases} y=mx+7 \\ y=-x^2+2x+3 \end{cases} \Longrightarrow mx+7=-x^2+2x+3 \Longrightarrow$$

$$\boxed{x^2+(m-2)x+4=0} \quad \text{معادلهٔ تلاقی}$$

شرط داشتن ریشه مضاعف $\Delta=0 \Longrightarrow (m-2)^2-16=0 \Longrightarrow m=-2$ و $m=+6$

در نتیجه معادلات خطوط مماس بصورت زیر خواهند بود:

$$y=-2x+7 \quad \text{و} \quad y=6x+7$$



یادآوری - اگرمختصات نقاط تماس خواسته شده باشد می‌توان طول این نقاط را از ریشه مضاعف معادلهٔ تلاقی $x'=x''=\dfrac{-b}{2a}$ بدست‌آورد و سپس عرض نقاط را محاسبه نمود. در مثال فوق خواهیم داشت:

$$x'=x''=\frac{-b}{2a}=\frac{-(m-2)}{2}$$

$$m=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow T\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$$

نقاط تماس:

$$m=6 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow T'\left|\begin{matrix}-2\\-5\end{matrix}\right.$$

معادلهٔ قائم بر منحنی از نقطه‌ای واقع در خارج منحنی

برای نوشتن معادلهٔ قائم یا قائمهایی که از نقطه $P(a, b)$ بر منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ رسم میشود، پای قائم را نقطه $M(x_0, f(x_0))$ اختیار میکنیم، معادله خط قائم بر منحنی در نقطه M چنانکه دیدیم بصورت: $y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ است.

برای اینکه این خط از نقطه P بگذرد لازم و کافیست که مختصات P در معادله آن صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$(1) \qquad b-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(a-x_0)$$

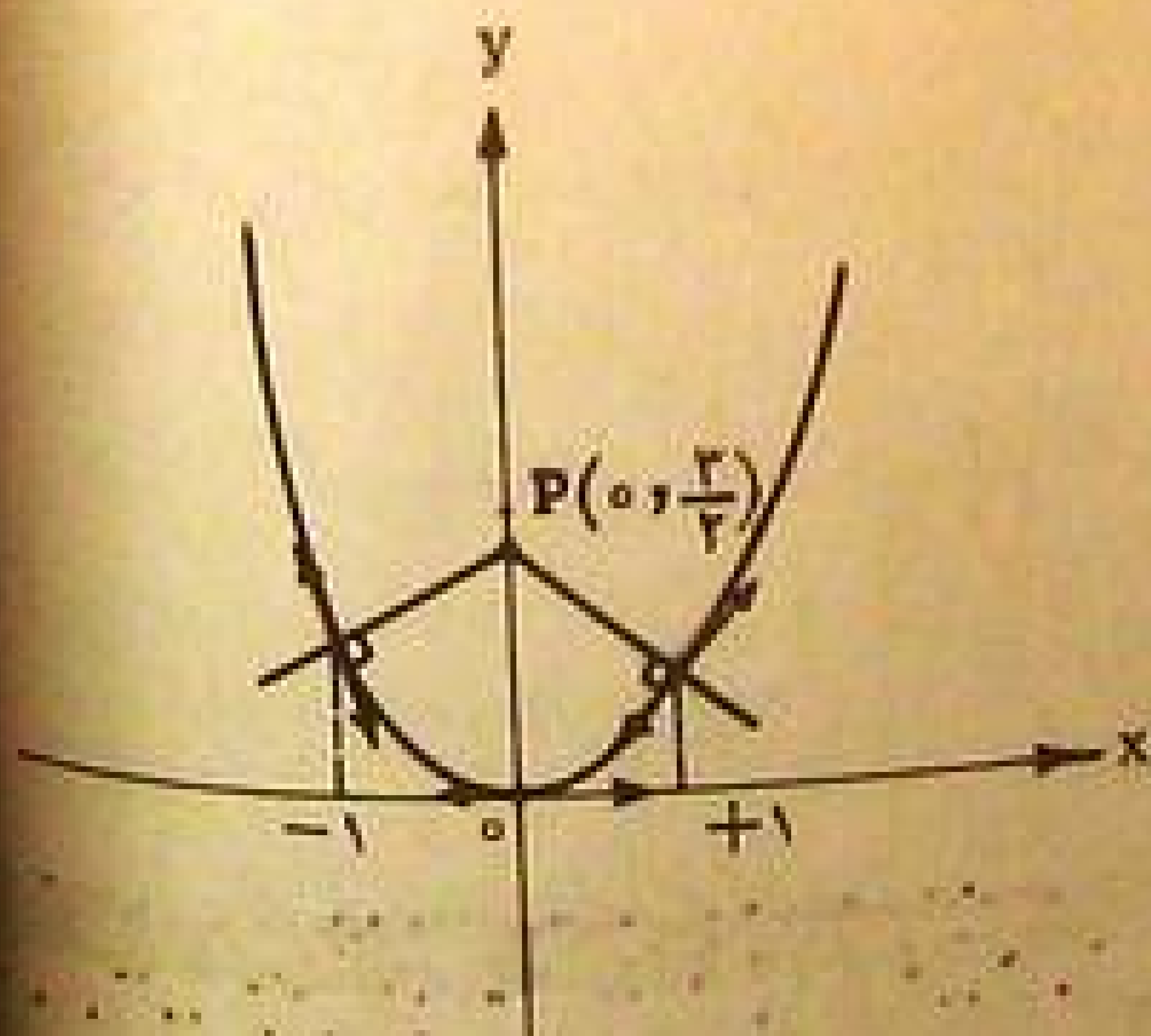
این معادله که در آن a و b معلوم‌اند طولهای پای قائم مرسوم از P بر منحنی را میدهد و از روی آن معادلهٔ قائم یاقائمها مشخص میگردد. (واضح است که تعداد جوابهای مسئله به تعداد جوابهای معادله(۱) بستگی دارد).

مثال - از نقطهٔ $P(0, \frac{3}{2})$ قائمهایی برمنحنی تابع $y=x^2$ رسم کرده‌ایم مطلوبست معادله این قائمها.

حل- مختصات پای قائم را $M(x_0, x_0^2)$ می‌گیریم بنابراین ضریب زاویه خط مماس در نقطهٔ M عبارتست از $m=2x_0$.

الف- اگر $x_0=0$ ، پس $m=0$ لذا ، معادله خط قائم عبارتست از $x=0$ (محور y ها).

ب- اگر $x_0\neq 0$ ، ضریب زاویه خط قائم برابراست با $\frac{-1}{2x_0}$ و معادله خط قائم بصورت:



$$y-x_0^2=\frac{-1}{2x_0}(x-x_0)$$

خواهد بود.

حال باید مختصات $P(0, \frac{3}{2})$ در این معادله صدق کند.

$$\frac{3}{2}-x_0^2=\frac{-1}{2x_0}(0-x_0)\Longrightarrow 2x_0^2-2x_0=0\Longrightarrow x_0=1 \ \text{یا} \ x_0=-1$$

پس در حالت ب از نقطهٔ P دو قائم بر منحنی تابع فوق می‌توان رسم نمود که مختصات پای این قائمها $M_1\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ و $M_2\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ و معادلات این قائمها بصورت زیر اند.

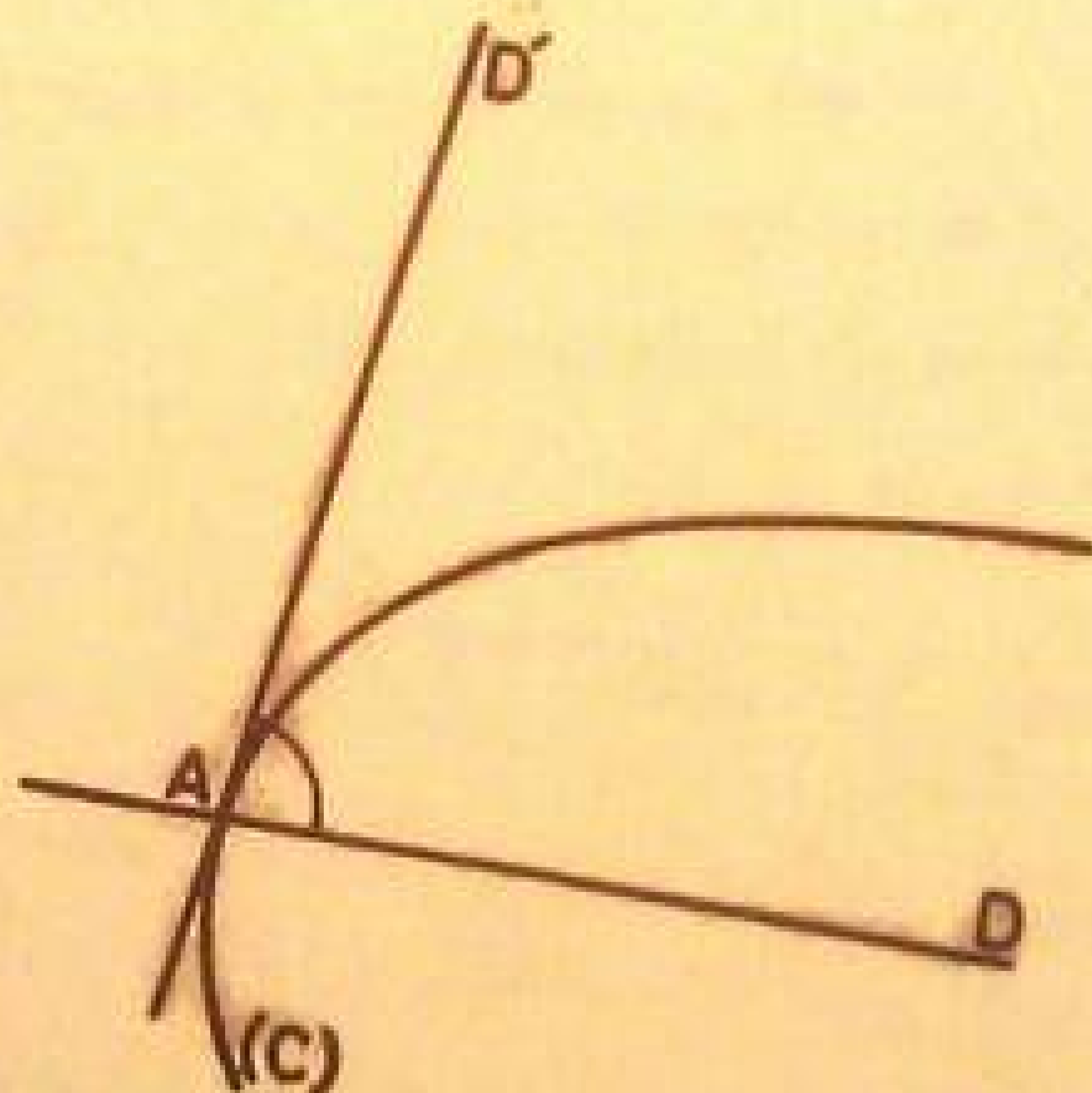
$$x+2y=3 \quad \text{و} \quad x-2y+3=0$$

زاویه خط و منحنی

فرض کنیم خط D و منحنی (C) یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند و خط D' مماس بر منحنی در نقطهٔ A باشد زاویهٔ دو خط D و D' را زاویهٔ خط D با منحنی می‌نامند.

زاویهٔ خط D با منحنی عبادت است از زاویه‌ای که این خط با مماس بر منحنی در نقطهٔ تلاقی می‌سازد.

اگر این زاویه قائمه باشد می‌گویند خط D برمنحنی عمود است یا D قائم بر منحنی‌است



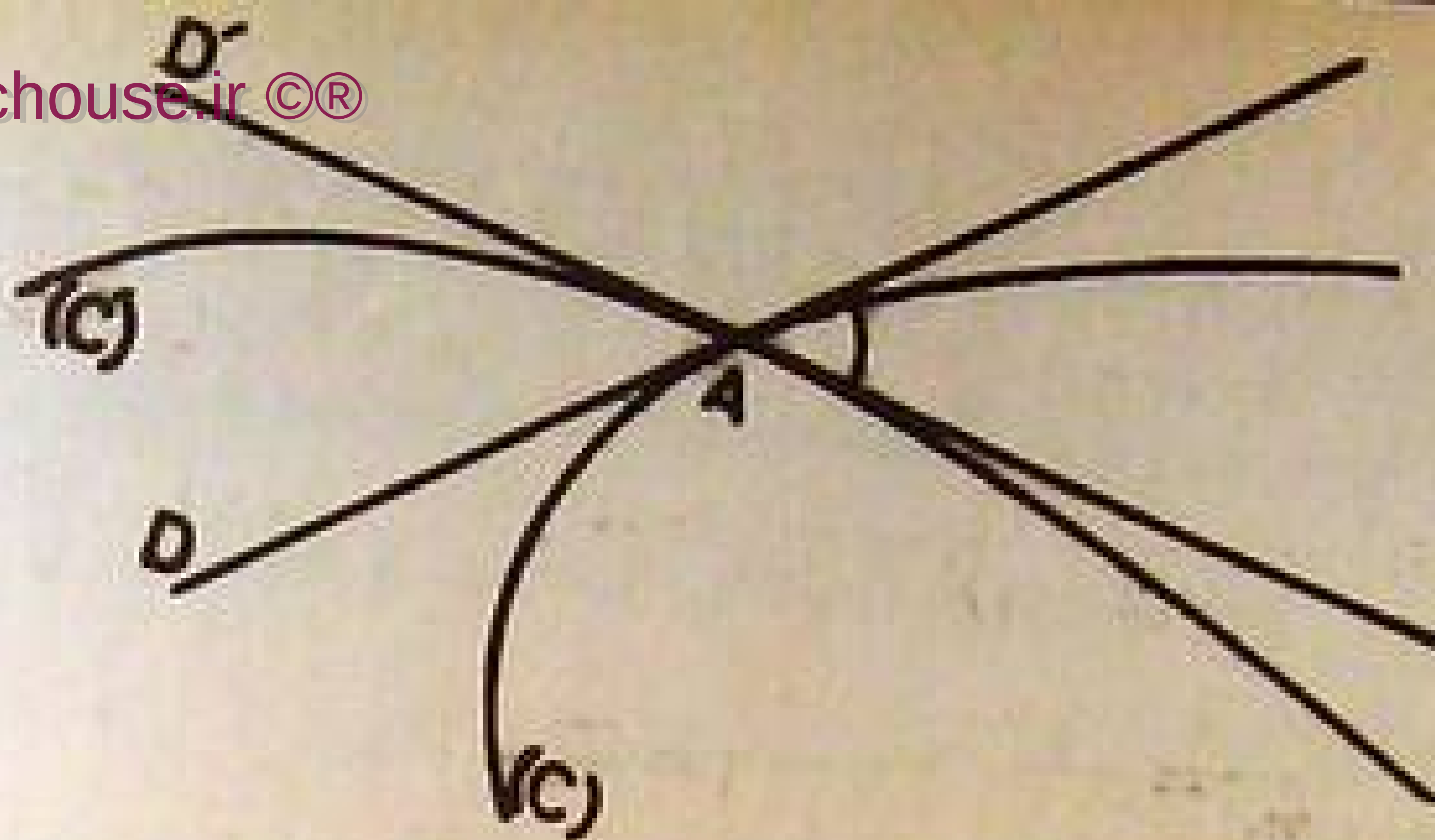
در غیر این صورت زاویهٔ حاده‌ای که این دو خط می‌سازند زاویهٔ خط با منحنی است.

زاویهٔ دو منحنی

دومنحنی‌را که در نقطهٔ A متقاطعند در نظر می گیریم و درنقطهٔ A مماس برهر منحنی رارسم می‌کنیم زاویه‌ای راکه این دو مماس با هم می‌سازند زاویهٔ دو منحنی می‌نامند.

زاویهٔ دو منحنی عبادت است از زاویه‌ای که مماسهای برمنحنی، در نقطهٔ تلاقی با یکدیگر می‌سازند.

اگر این زاویه قائمه باشد می گویند دومنحنی بریکدیگر عمودند.



مثال ۱ ــ زاویهٔ بین خط Δ بمعادلهٔ $y=2x$ و منحنی C، بمعادله $y=x^2-x$ را دریکی از نقاط تلاقیشان تعیین کنید.

حل ــ نقاط برخورد خط و منحنی‌را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=x^2-x \end{cases} \Rightarrow x^2-x=2x \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=3$$

$$\Rightarrow M\Big|^{3}_{6} \qquad N\Big|^{0}_{0}$$

زاویه بین خط و منحنی را در نقطه M تعیین می کنیم:

$y=x^2-x \Rightarrow y'=2x-1$

$m=6-1=5$ مماس در M بر منحنی

$m'=2$ خط مفروض

$$tgv=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}=\pm\frac{5-2}{1+10}=\pm\frac{3}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{v=Arctg\frac{3}{11}}$$

مثال ۲ ــ زاویه بین دو منحنی بمعادلات $y=x^2$ و $y=\frac{2x}{x-1}$ را در یکی از نقاط تلاقیشان بدست آورید:

حلــ نقاط تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{2x}{x-1} \end{cases} \Rightarrow x^2=\frac{2x}{x-1} \Rightarrow x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x=0 \;,$$

$x=+2 \;,\; x=-1$

و نقاط تلاقی $M\Big|^{0}_{0}$ و $N\Big|^{-1}_{1}$ و $P\Big|^{2}_{4}$ است.

زاویهٔ بین دو منحنی در نقطه P را بدست می‌آوریم:

ضریب مماس در نقطه P براین منحنی $\quad y=x^2 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow m_1=4$

ضریب مماس درنقطهٔ P براین منحنی $\quad y=\frac{2x}{x-1} \Rightarrow y'=\frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow m_2=-2$

$$tgv=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{4-(-2)}{1+4(-2)}=\mp\frac{6}{7}$$

زاویهٔ حاده بین دو منحنی $\quad tgv=\frac{6}{7} \Rightarrow \boxed{v=Arctg\frac{6}{7}}$

۲ـ شرط بخش‌پذیری چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر و $Q(x)$ چندجمله‌ای خارج قسمت باشد می‌توان نوشت:

$$P(x)=(x-a)^n\cdot Q(x)$$

حال اگر از دو طرف رابطهٔ بالا مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$P'(x)=n(x-a)^{n-1}\cdot Q(x)+(x-a)^n\cdot Q'(x)$$
$$=(x-a)^{n-1}[nQ(x)+(x-a)Q'(x)]$$

مقدار داخل کروشه، خود یک چند جمله‌ای نسبت به x است، اگر آن را $Q_1(x)$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$P'(x)=(x-a)^{n-1}\cdot Q_1(x)$$

یعنی: اگر چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد، مشتق آن $P'(x)$ بر $(x-a)^{n-1}$ بخش پذیر خواهد بود.

روشن است که اگر کار مشتق گیری را ادامه دهیم، به ترتیب به دست می‌آید:

$$P''(x)=(x-a)^{n-2}\cdot Q_2(x)$$
$$P'''(x)=(x-a)^{n-3}\cdot Q_3(x)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$P^{(n-1)}(x)=(x-a)\cdot Q_{n-1}(x)$$

و به این ترتیب نتیجه می‌شود که:

چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر است، هرگاه خود $P(x)$ و همهٔ مشتقهای پی در پی آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش پذیر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$P(a)=P'(a)=P''(a)=\cdots=P^{(n-1)}(a)=0 \qquad (1)$$

به‌عکس می‌توان ثابت کرد که اگر شرط (۱) برقرار باشد چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر است.

مثال ۱ - ثابت کنید چندجمله‌ای $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است.

داریم:

$$P'(x)=n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}$$

از طرف دیگر:

$$P(1)=n-(n+1)+1=0$$

و

$$P'(1)=n(n+1)-n(n+1)=0$$

چون $P(x)$ و مشتق اول آن $P'(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، بنابراین $P(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است.

مثال ۲ - a، b و c را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای:

$$P(x)=x^4+ax^3+bx+c$$

بر $(x-1)^3$ بخش پذیر باشد.

داریم:

$$P'(x)=4x^3+3ax^2+b$$
$$P''(x)=12x^2+6ax$$

و باید داشته باشیم:

$$P(1)=1+a+b+c=0$$
$$P'(1)=4+3a+b=0$$
$$P''(1)=12+6a=0$$

و از این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی، مقادیر a، b و c به دست می‌آید:

$$a=-2 \quad \text{و} \quad b=2 \quad \text{و} \quad c=-1$$
$$P(x)=x^4-2x^3+2x-1=(x-1)^3(x+1)$$

۳- قاعدهٔ هوپیتال

فرض می‌کنیم که f و g توابعی مشتق پذیر در a باشند و $f(a)=0$ و $g(a)=0$. بعلاوه فرض می‌کنیم که g در نزدیکی a (غیر از خود a) مخالف صفر باشد. کسر $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x\to a$ به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. برای مقادیر $x\neq a$ می‌توان این کسر را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)}$$

روشن است که اگر x به سمت a میل کند، $\frac{f(x)}{x-a}$ به سمت $f'(a)$ و در صورتیکه $g'(a)\neq 0$ باشد کسر $\frac{x-a}{g(x)}$ به سمت $\frac{1}{g'(a)}$ میل می کند و بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{(قاعدهٔ هوپیتال)}$$

اگر $f'(a)=0$ و $g'(a)=0$ باز هم می‌توان قاعدهٔ هوپیتال را در مورد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ به کار برد. و این عمل را آنقدر باید ادامه داد تا لااقل یکی از عوامل صورت یا مخرج صفرنشود.

می‌توان ثابت کرد که اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$، وقتی $x\to a$، به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درآید، باز هم می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال برای پیدا کردن حد آن استفاده کرد.

مثال:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cos 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{1}=4$$

توجه کنید که در این مثال قاعدهٔ هوپیتال دوبار به کار رفته است.

$$2)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{a}{a'}$$

چرا؟

$$3)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+1}{4x-1}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

$$4)\quad \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x}=\frac{3}{4}$$

$$5)\quad \lim_{x\to -1}\frac{3+2x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+4}-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2\sqrt{-1+2}}}{\frac{3}{2\sqrt{-3+4}}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1$$

۴ـ توابع صعودی و نزولی

فرض کنید که تابع f در فاصلهٔ I تعریف شده باشد.

(الف) f را روی I صعودی گویند، هرگاه برای هر x_1 و x_2 در I که در شرط $x_1<x_2$ صدق کنند داشته باشیم $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. (در این حالت جهت تغییرات متغیر و تابع یکی است).

(ب) f را روی I نزولی گویند، هرگاه برای هر x_1 و x_2 در I که در شرط $x_1<x_2$ صدق کنند داشته باشیم $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. (در این حالت جهت تغییرات متغیر و تابع یکی نیست).

(ج) f را روی I یکنوا گویند هرگاه f روی I صعودی یا نزولی باشد.

چند مثال:

۱ـ تابع $f(x)=3x$، همیشه صعودی است، زیرا اگر داشته باشیم $x_1<x_2$، آنگاه

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1-3x_2=3(x_1-x_2)<0$$

۲ـ بررسی تابع $f(x)=x^3$ از لحاظ صعودی و نزولی بودن آن. فرض کنید $x_1<x_2$ داریم:

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

عبارت داخل پرانتز دوم همیشه مثبت است.

به این ترتیب روشن است که خواهیم داشت:

$$f(x_1)-f(x_2)<0 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

و بنابراین تابع $f(x)=x^3$ در فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

۳ـ $f(x)=x^2+1$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول ـ $x\in(-\infty,0]$ در این حالت، اگر $x_1<x_2$، آنگاه داریم:

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

پرانتز اول بنا برفرض و پرانتز دوم بنا بر شرط منفی بودن x، منفی هستند و بنابراین حاصلضرب آنها مثبت می‌شود:

$$f(x_1)-f(x_2)>0 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

یعنی تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $(-\infty,0]$ نزولی است.

حالت دوم ـ $x\in[0,\infty)$. در این حالت، با توجه به مثبت بودن x، مقدار x_1+x_2 مثبت می‌شود و داریم:

$$f(x_1)-f(x_2)<0 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

یعنی تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است.

از تعریفی که برای صعودی یا نزولی بودن یك تابع دیدیم، می‌توان نتیجه گرفت:

الف) تابع f درفاصلهٔ معینی صعودی است، وقتی که باانتخاب هر $x_1 \neq x_2$ از این فاصله داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$$

ب) تابع f درفاصلهٔ معینی نزولی است، وقتی که با انتخاب هر $x_1 \neq x_2$ از این فاصله داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$$

ج) تابع f درفاصلهٔ معینی ثابت است، وقتی که با انتخاب هر $x_1 \neq x_2$ از این فاصله داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

۵- ماکزیمم و می‌نیمم یك تابع

فرض کنید که x_0 نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f باشد، گویند:

الف) تابع f در x_0 دارای یك ماکزیمم نسبی (موضعی) است، به شرطی که فاصله‌ای مثل (x_0-a, x_0+a) وجود داشته باشدکه زیر مجموعهٔ D_f بوده،و به‌ازای هر $x \neq x_0$ از این فاصله داشته باشیم:

$$f(x)<f(x_0)$$

در این حالت $f(x_0)$ را مقدار ماکزیمم نسبی (یا موضعی) f در x_0 می‌نامند.

ب) تابع f در x_0 دارای‌یك مینیمم نسبی (یا موضعی) است، به شرطی که فاصله‌ای‌مانند (x_0-a, x_0+a) وجود داشته باشدکه زیر مجموعهٔ D_f بوده و به ازای هر $x \neq x_0$ از این فاصله، داشته باشیم:

$$f(x)>f(x_0)$$

$f(x_0)$ را در این حالت مقدار می‌نیمم نسبی (یا موضعی) f در x_0 می‌نامند.

هرگاه تابع f در x_0 دارای ماکزیمم یامی‌نیمم نسبی باشدگوئیم f در x_0 دارای اکسترمم است و در این حالت $f(x_0)$ را یك مقدار اکسترمم برای تابع گویند.

تبصرهٔ ۱- باتوجه به‌تعریف صعودی‌ونزولی بودن‌یك‌تابع، می‌توان‌تعریف دیگری که‌هم‌ارز با تعریف بالاست، برای ماکزیمم و مینیمم نسبی پیداکرد:

تابع f در x_0 دارای مینیمم نسبی (یا ماکزیمم نسبی) مساوی $f(x_0)$ است، به‌شرطی که

فاصله‌ای مثل (x_0-a, x_0+a) که زیرمجموعه‌ای از D_f است وجود داشته باشد به نحوی که f در فاصلهٔ (x_0-a, x_0) نزولی (یا صعودی) و در فاصلهٔ (x_0, x_0+a) صعودی (یا نزولی) باشد.

تبصرهٔ ۲ - اگر D دامنهٔ تعریف تابع f و x_0 نقطه‌ای از D باشد، گویند که f در x_0 دارای یک ماکزیمم مطلق مساوی $f(x_0)$ است به شرطی که برای هر x از D داشته باشیم:

$$f(x)\leqslant f(x_0)$$

همچنین f در x_0 دارای مینیمم مطلق است اگر برای هر x از D داشته باشیم:

$$f(x)\geqslant f(x_0)$$

از این به بعد، هر جا از کلمه‌های ماکزیمم و مینیمم استفاده کنیم، منظور ماکزیمم و مینیمم نسبی است، مگر این که به تأکید مطلق بودن آن را یادآوری کنیم و یا مطلق بودن آن از قرینهٔ مطلب روشن باشد.

۶- کاربرد مشتق در تعیین جهت تغییرات توابع و نقاط ماکزیمم و مینیمم

فرض کنید که تابع f در فاصلهٔ I مشتق پذیر باشد. اگر f در این فاصله صعودی باشد، برای هر مقدار x_0 و x_1 از این فاصله، نسبت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

مثبت است. وقتی که x_1 به سمت x_0 میل کند، حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عدد $f'(x_0)$ خواهد شد. چون نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مثبت است می‌توان ثابت کرد که حد آن، یعنی $f'(x_0)$، غیرمنفی است[1] وبنابراین دراین فاصله باید داشته باشیم: $f'(x)\geqslant 0$.

اگر تابع f در این فاصله نزولی باشد، نسبت $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ منفی است و وقتی $x_1\to x_0$، حد این نسبت، یعنی $f'(x_0)$ نامثبت می‌شود و بنابراین در این فاصله باید داشته باشیم: $f'(x)\leqslant 0$.

بالاخره اگرتابع f درفاصله‌ای برابربا مقدارثابتی باشد، مشتق آن یعنی f' درهر نقطه از این فاصله برابر صفر است: $f'(x)=0$.

حکم زیر که تا حدودی عکس مطلب فوق است نیز درست است، یعنی:

تابع f درهر فاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد (مگر احیاناً درتعداد متناهی نقطه که صفر شود)، صعودی و در هر فاصله‌ای که مشتق آن منفی باشد (مگر احیاناً در تعداد با

۱- باید توجه داشت که اگر $f(x)>a$، آنگاه $\lim_{x\to x_0} f(x)\geqslant a$ حد (درصورت وجود)

پایانی نقطه که صفر شود)، نزولی و در هر فاصله‌ای که مشتق آن برابر صفر باشد، مقداری ثابت است.

مطلب اخیر روش زیر را برای تعیین اکسترمم نسبی یك تابع به دست میدهد.

فرض کنید که تابع f در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد. اگر f' در سمت چپ و نزدیك x_0 مثبت و در سمت راست و نزدیك آن منفی باشد در این صورت f در سمت چپ و نزدیك x_0 صعودی و در سمت راست و نزدیك آن نزولی و در نتیجه تابع در x_0 دارای یك ماکزیمم است. می‌توان شبیه این مطلب را درمورد می‌نیمم نسبی نیز بیان کرد. بنابراین برای تعیین جهت تغییرات وماکزیمم ومی‌نیمم توابع باید مشتق آنها را تعیین علامت کنیم.

مثال ۱ - مطلوب است تعیین جهت تغییرات تابع:

$$f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x-۱$$

مشتق این تابع، یعنی $f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲$، به ازای $x=۱$ و $x=۲$ برابرصفر می‌شود. f' درفاصله‌های $(-\infty,۱)$ و $(۲,+\infty)$ مثبت و درفاصلهٔ $(۱,۲)$ منفی است بنابراین f در دو فاصلهٔ اول صعودی و در فاصلهٔ دوم نزولی است.

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۴	↘	۳	↗	$+\infty$

تابع f، در نقطهٔ $(۱,۴)$ دارای ماکزیمم و در نقطهٔ $(۲,۳)$ دارای مینیمم نسبی است.

مثال ۲ - جهت تغییرات تابع $f(x)=x^۲+۱$ را پیدا کنید.

مشتق تابع، یعنی $f'(x)=۳x^۲$ همواره مثبت است مگر در نقطهٔ صفر که صفر است و بنابراین تابع همیشه صعودی است.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۱	↗	$+\infty$

در نقطهٔ $x=۰$، مماس برمنحنی با محور طول‌ها موازی است (زیرا ضریب زاویهٔ آن برابر با صفر است)، ولی چون مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، ماکزیمم یا مینیممی از تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال ۳ - مطلوب است تعیین جهت تغییرات تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$.

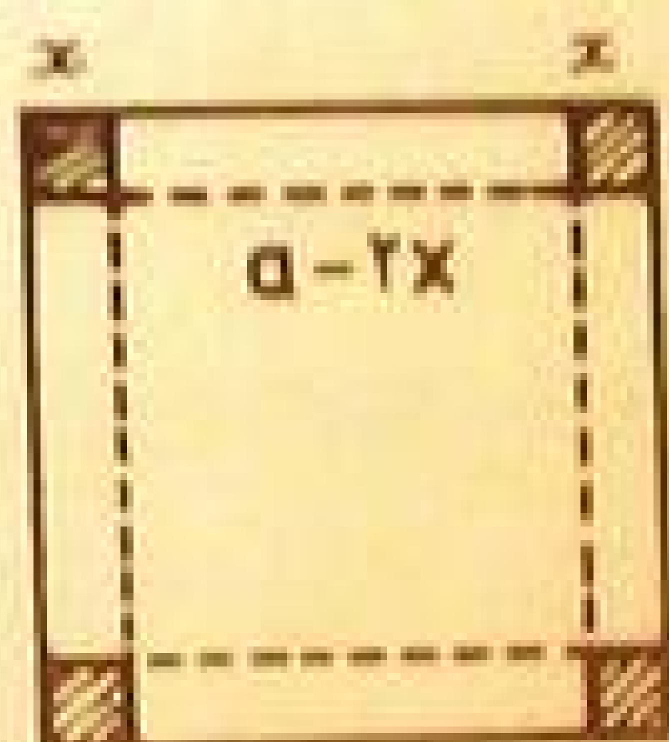
مشتق تابع، یعنی $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ، در نقطهٔ $x=0$ معنا ندارد، ولی در این نقطه تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

تابع در فاصلهٔ $(-\infty, 0)$ نزولی و در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ صعودی است. تابع در مبدأ مختصات مینیمم است و با وجود این که در این نقطه پیوسته است، دارای مشتق نیست.

۷ـ موارد عملی کاربرد مشتق

مثال ۱ ـ صفحه مقوائی است مربع شکل به‌ضلع a میخواهیم از هر گوشه‌آن مربعی ببریم وآن را خم کنیم تا جعبه‌ای درباز شود. مطلوبست تعیین ضلع مربع گوشه‌ها برای آنکه حجم جعبه ماکزیمم باشد.



حل ــ اگر طول ضلع مربع گوشه‌ها x باشد ضلع قاعده جعبه $a-2x$ و حجم آن

$v=(a-2x)^2x$

میگردد، برای تعیین ماکزیمم یا می‌نیمم آن مشتق آنرا حساب میکنیم وصفر قرار میدهیم.

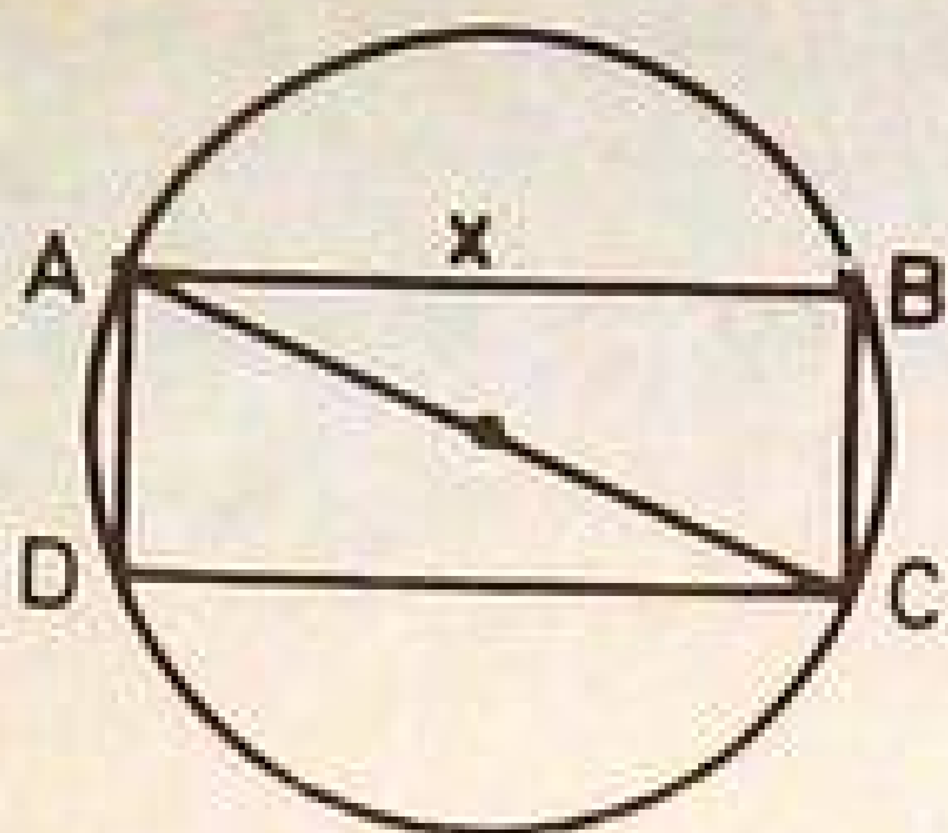
$v'=12x^2-8ax+a^2 \quad v'=0 \quad x=\frac{a}{2}, \frac{a}{6}$

حجم جعبه بازاء $x=\frac{a}{6}$ و $x=\frac{a}{2}$ ماکزیمم و می‌نیمم میگردد.

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
v'		$+$	0	$-$	0
v	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	0

پس حجم جعبه بازاء $x=\frac{a}{6}$ ماکزیمم و بازاء $x=0, \frac{a}{2}$ می‌نیمم میگردد.

مثال ۲ ـ در دایره‌ای به شعاع R مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کرده‌اند اضلاع مستطیل را برحسب R حساب کنید.



حل ــ طول مستطیل را x فرض میکنیم

عرض آن مساوی $\sqrt{4R^2 - x^2}$ میگردد

مساحت مستطیل $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ و از آنجا:

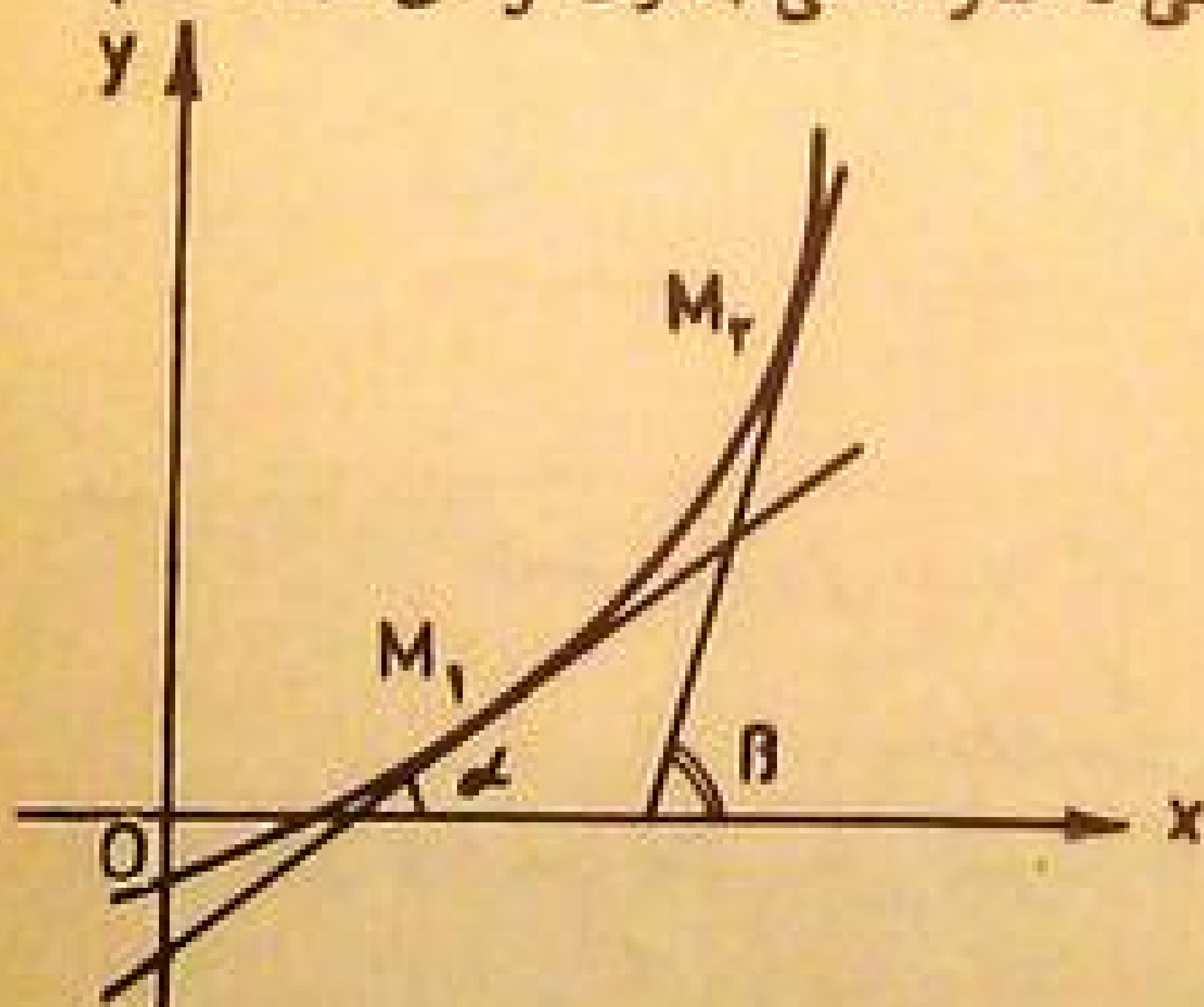
$$S' = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \qquad x = R\sqrt{2}$$

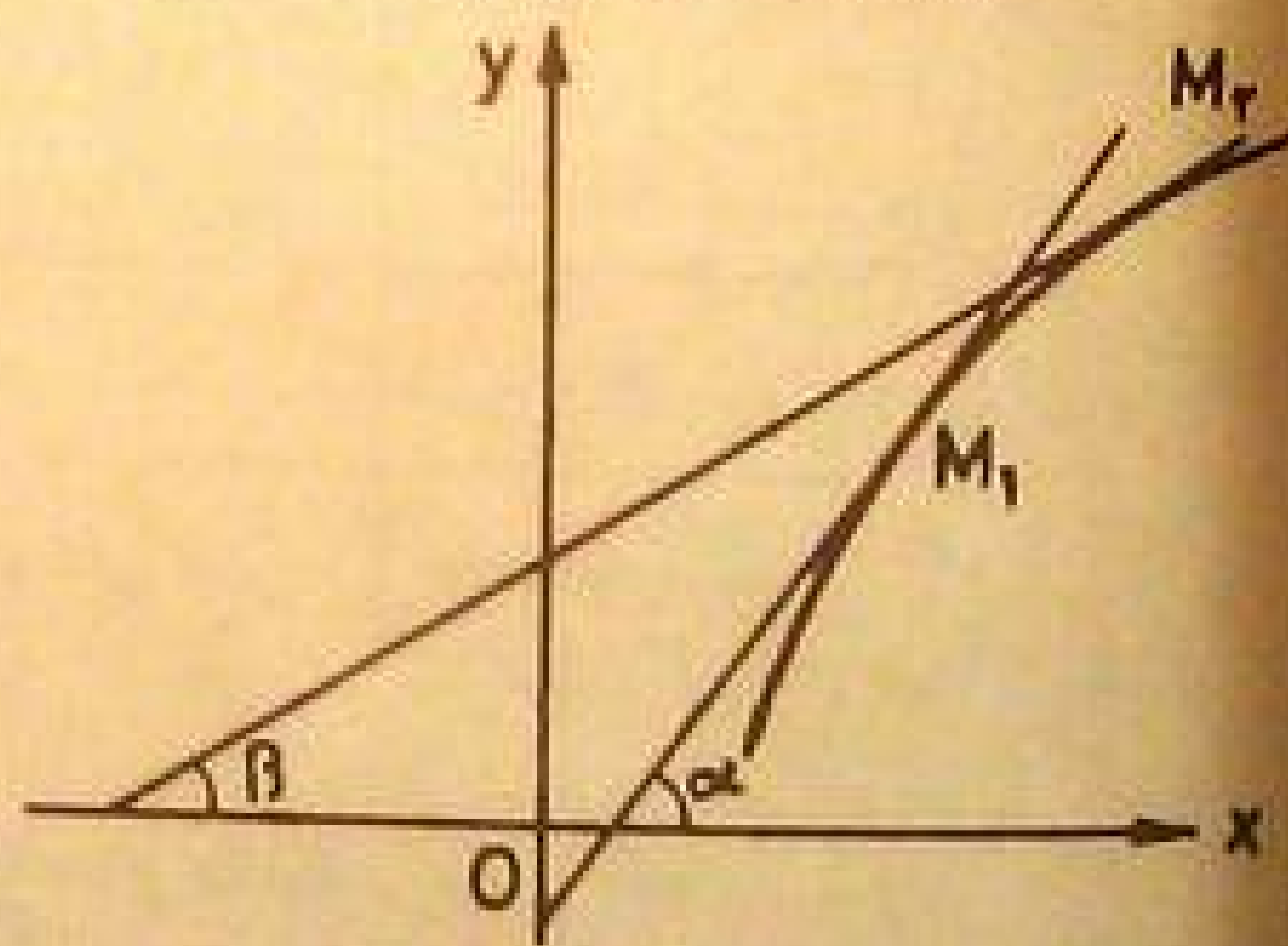
چنانچه طبق مثال ۱ جدول تغییرات S و S' را تعیین کنیم خواهیم دید که مساحت در جائی که طول مساوی عرض مساوی $R\sqrt{2}$ میگردد ماکزیمم است، یعنی مستطیل مربع می‌باشد.

۸ـ تقعر و تحدب منحنی؛ نقطه عطف

گویند تقعر کمانی از یك منحنی به طرف بالا (به طرف y های مثبت) یا به طرف پایین (به طرف y های منفی) است، برحسب آن که این کمان بالا یا پایین مماس در هر یك از نقاط آن کمان قرار گرفته باشد.

از روی شکل می‌توان دید که درحالت اول (وقتی که تقعر منحنی به‌طرف yهای مثبت‌است)





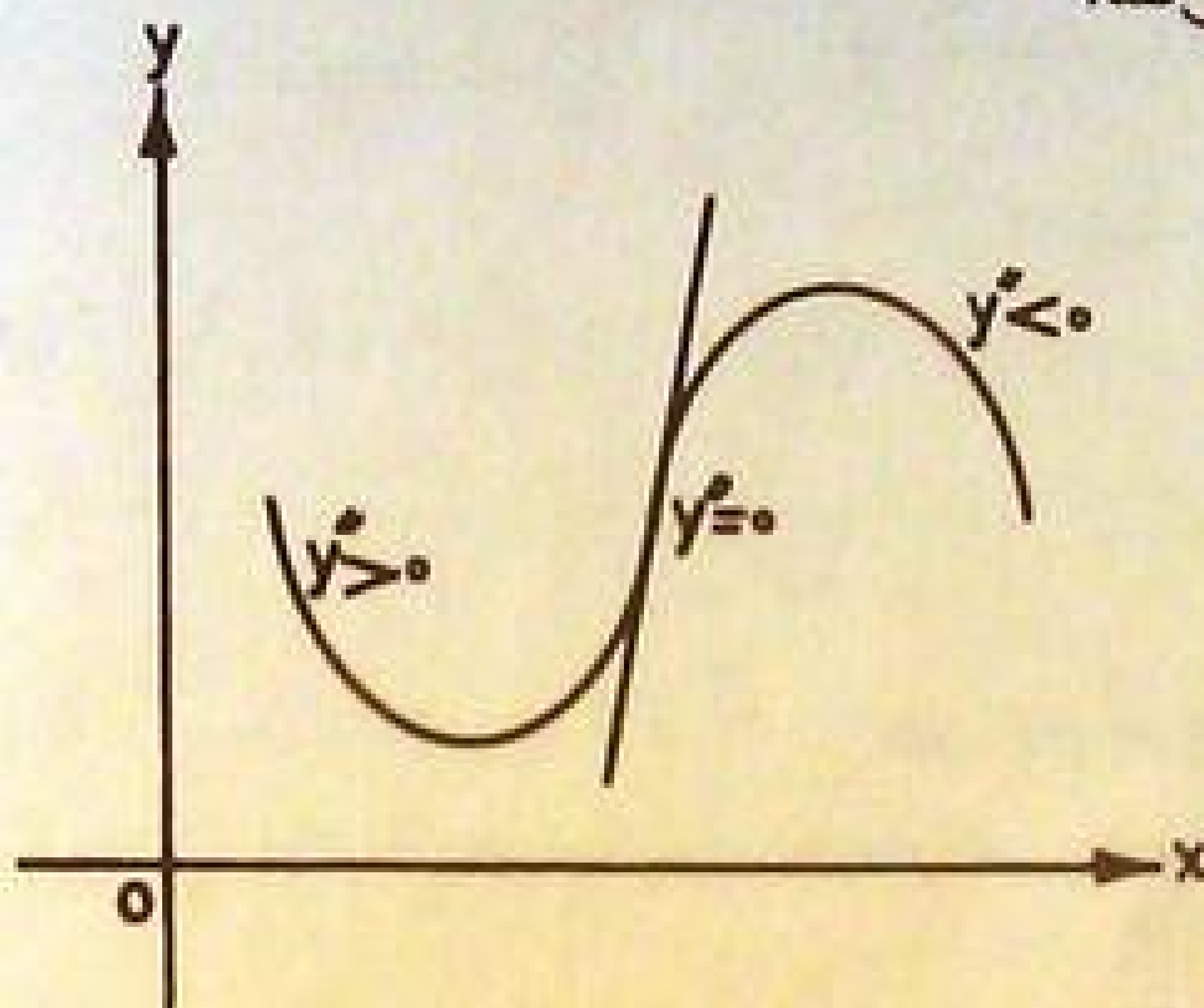
ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی، یعنی $f'(x)$، یك تابع صعودی است و بنابراین درچنین وضعی باید مشتق f'، یعنی f''، مثبت باشد.

همچنین وقتی که تقعرمنحنی به‌طرف yهای منفی‌است، ضریب زاویهٔ مماس نزولی وبنابراین f'' منفی است.

نقطه‌ای از منحنی راکه درآنجا تقعر منحنی عوض می‌شود و دارای مماس می‌باشد، نقطهٔ عطف منحنی گویند بنابراین شرط اینکه نقطهٔ $x = a$ نقطهٔ عطف منحنی تابع باشد این است که

اولا تابع f در این نقطه پیوسته و دارای مماس باشد. ثانیاً f'' در همسایگی آن نقطه تغییر علامت بدهد.

با توجه به‌تعریفی که برای جهت تقعر منحنی کردیم، معلوم می‌شود که درنقطه عطف مماس برمنحنی، ازآن عبور می‌کند.



مثال ۱- جهت تقعر منحنی $y = x^{۳} - ۶x + ۲$ ونقطهٔ عطف آن را پیدا کنید.

مشتقهای اول ودوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y' = ۳x^{۲} - ۶ \qquad , \qquad y'' = ۶x$$

مشتق دوم به‌ازای مقادیر منفی x، منفی و به ازای مقادیر مثبت x، مثبت است و در نقطهٔ $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد:

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
جهت تقعرمنحنی	به‌طرف yهای منفی	۲ (نقطه عطف)	به طرف yهای مثبت

مثال ۲- جهت تقعر منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x}{x+۱}$ را پیدا کنید

$$y = \frac{x}{x+۱} \quad y' = \frac{۱}{(x+۱)^{۲}} \quad y'' = \frac{-۲}{(x+۱)^{۳}}$$

مشتق دوم در ازای $x = -۱$ تغییرعلامت میدهد ولی تابع نقطه عطف ندارد. (چرا؟)

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
y''	$+$		$-$
جهت تقعر منحنی	به طرف yهای مثبت		به‌طرف yهای منفی

تمرین

معادلهٔ مماس برهریك از منحنیهای زیررا در نقطهٔ داده شده، بنویسید:

۱ـ $y=\frac{1}{2}x^2$ درنقطهٔ $x=1$.

۲ـ $y=\frac{1}{4}(x-3)(x+4)$ در نقطهٔ $x=-\frac{3}{4}$.

۳ـ $y=\frac{3x+1}{x+1}$ درنقطهٔ $x=-2$.

۴ـ $y=x+\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{4}$. مماس براین منحنی در نقطهٔ $x=0$ به چه صورتی درمی‌آید؟

۵ـ معادلهٔ خط مماسی از منحنی $y=\frac{x^2}{2}-2x+3$ را پیداکنیدکه با نیمساز ربع دوم موازی باشد.

۶ـ ازنقطهٔ $P\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ مماسهایی بر منحنی $y=\frac{x^2}{2}$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خطهای مماس را پیداکنید.

۷ـ از نقطهٔ به‌عرض $y=5$، واقع برمنحنی قائمی برمنحنی $y=\frac{4-x}{x+2}$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ خط قائم را پیداکنید.

۸ـ معادلهٔ خط مماس و خط قائم برمنحنی $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ را در نقطهٔ به طول $x=0$ واقع برمنحنی پیداکنید.

۹ـ از نقطهٔ $M(2, 1)$، دو مماس و یك قائم برمنحنی $y=-x^2+2x$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ آنها را پیداکنید.

۱۰ـ از نقطهٔ $M(2, -2)$، چند قائم می‌توان برمنحنی $y=\frac{x-1}{x+1}$ رسم کرد؟ معادلهٔ آنها را پیداکنید.

۱۱ـ خط $x+y=4$ با منحنی $y=4-\frac{x^2}{2}$ چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱۲ـ منحنیهای $y=x^2-1$ و $y=-x^2+1$، درنقطه‌های برخورد، چه زاویه‌ای باهم می‌سازند.

۱۳ـ ثابت کنید که طول قطعه مماس برمنحنی: $a>0$ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

و محدود به‌محورهای مختصات، مقداری است ثابت.

۱۴ـ مقادیر a و b و c را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای:

$$f(x)=3x^5+ax^3+bx+c$$

بر $(x-1)^3$ بخش‌پذیر باشد.

۱۵ـ مقادیر a و b و c را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای:

$$f(x)=x^4+ax^2+bx+c$$

بر $(x-1)^2(x-2)$ بخش‌پذیر باشد.

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، هر کدام از حدهای زیر را پیدا کنید:

۱۶ـ $$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{3x+9}$$

۱۷ـ $$\lim_{x\to a}\frac{3x^2-2ax-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$$

۱۸ـ $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-3}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$

۱۹ـ $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}$$

۲۰ـ $$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}$$

۲۱ـ $$\lim_{x\to -2}\frac{3\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}}{2x^2+3x-2}$$

۲۲ـ $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 3x-\cos 3x}$$

جهت تغییرات و نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی را ، در هر کدام از تابعهای زیر پیدا کنید:

۲۳ـ $y=x^3-2$

۲۴ـ $y=x^2-4x+1$

۲۵ـ $y=x^2(x-1)$

۲۶ـ $y=x^3-2x^2+x-5$

۲۷- $y=x^2(x+1)^3$

۲۸- $y=\frac{x}{3x-5}$

۲۹- $y=\frac{x}{x^2+x+2}$

۳۰- $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

۳۱- $y=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

۳۲- $y=\frac{x}{(x^2+1)^2}$

۳۳- $y=x+\sqrt{x}$

۳۴- $y=x+\sqrt{x^2+x+1}$

۳۵- دوعدد پیدا کنید که مجموعشان ۳۶ ومجموع مربعات آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

۳۶- جعبه مکعب مستطیلی به‌حجم ۷۲ سانتیمتر مکعب لازم است به‌قسمی که طول قاعده‌آن دوبرابر عرض آن باشد ابعادآن را پیدا کنید به‌قسمی که سطح کل آن کمترین مقدار باشد.

۳۷- ازیك قطعه مقوای مربع شکل به‌ضلع ۱۸ سانتیمتر میخواهیم یك قوطی درباز بسازیم برای این‌منظور ازچهار گوشه این مقوا چهارمربع بریده اطراف‌آن را تا میکنیم مربع‌های اطراف را به‌ضلع چندسانتیمتر انتخاب کنیم تا گنجایش قوطی حاصل بیشترین مقدار باشد.

۳۸- استوانه‌ای در کره‌ای به‌شعاع r محاط شده‌است برای‌اینکه حجم‌این استوانه بیشترین مقدار باشد ارتفاع استوانه را چقدر انتخاب کنیم.

۳۹- یك‌مخروط بمولد ۲۰ میخواهیم بسازیم ارتفاع این مخروط‌را چقدر بگیریم تاحجم آن ماکزیمم شود.

۴۰- ثابت کنید یك مخروط باحجم‌ثابت وقتی کمترین مقدار سطح‌را دارد که نسبت‌ارتفاع آن به‌شعاع قاعده $\sqrt{2}$ باشد.

۴۱- ارتفاع استوانه‌ای را پیدا کنید که درمخروط دواری‌محاط‌است‌وبیشترین حجم ممکن را دارد.

جهت تقعر و نقطهٔ عطف را برای هریك از منحنیهای زیر پیدا کنید:

۴۲- $y=(x-1)^3$

۴۳- $y=x^4-6x^2+1$

۴۴- $y=\frac{x}{x^2+1}$

۴۵- $y=\frac{1}{x^2-4}$

۴۶- $y=\frac{1}{(x+1)^3}$

۴۷- $y=\frac{1}{x^2+x+1}$

۴۸- $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$

۴۹- $y=\sqrt[3]{x-1}$

فصل ۷

منحنی نمایش تغییرات تابعها

۱ـ بررسی تغییرات تابع $y=ax^2+bx+c$

تابع $y=ax^2+bx+c$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی x ، معین است. مشتق آن $y'=2ax+b$ ، به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ برابر صفر می‌شود و به‌ازای $x>-\frac{b}{2a}$ هم علامت با a و به‌ازای $x<-\frac{b}{2a}$ دارای علامت مخالف a است. از طرف دیگر، وقتی x به سمت $\pm\infty$ میل کند، برای $a>0$ ، y به سمت $+\infty$ و برای $a<0$ ، y به سمت $-\infty$ ، میل می کند.

مقدار تابع در نقطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ برابر است با $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$. بنابراین، داریم:

برای $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

برای $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

در نتیجه، تابع $y=ax^2+bx+c$ ، در نقطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ در حالت $a>0$ از مینیمم و

درحالت $a<0$ از ماکزیمم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ می گذرد. در هرحال این نقطه را رأس و خود منحنی را سهمی گویند و خطی که از رأس سهمی موازی محور y ها رسم می‌شود محور تقارن این منحنی است.

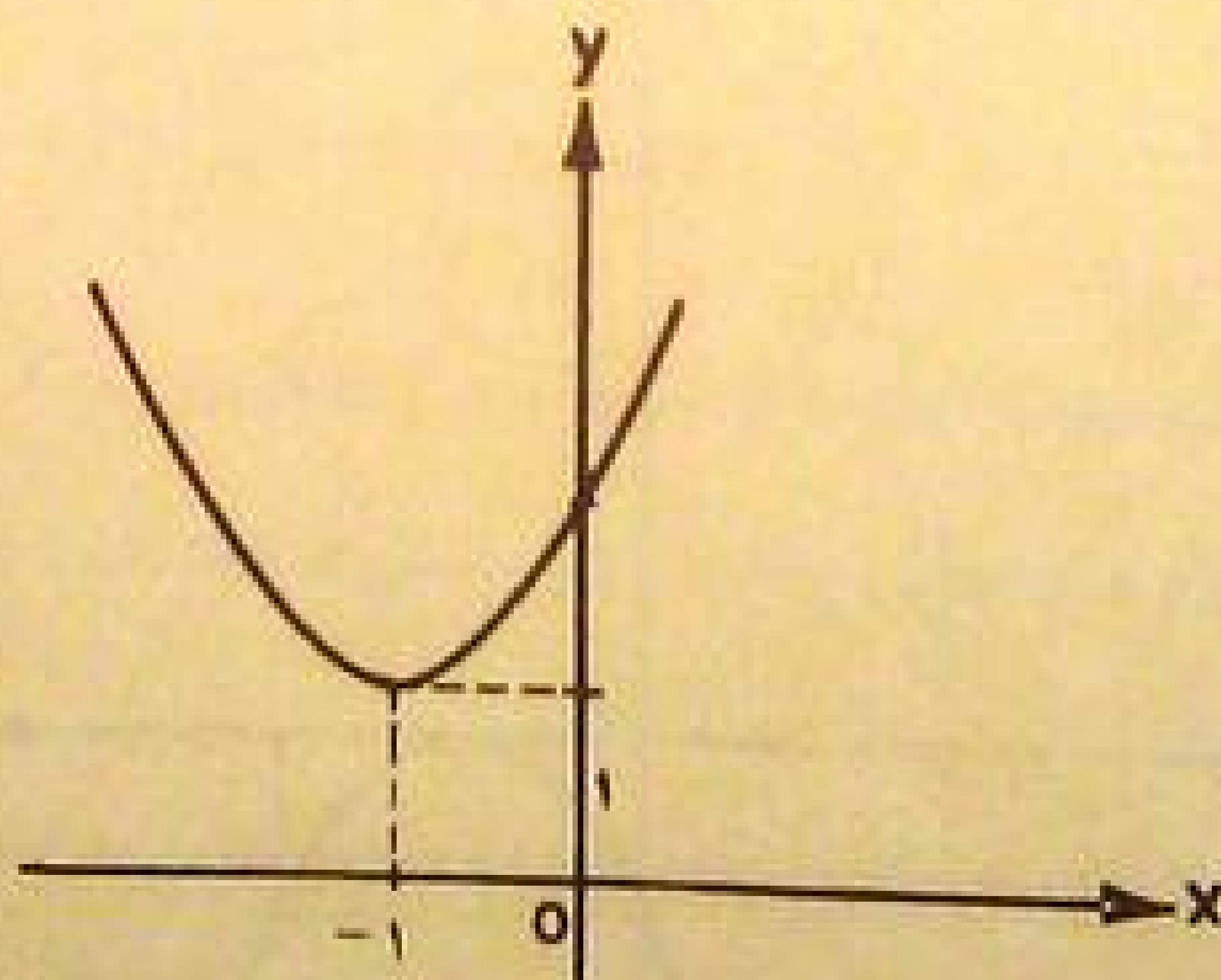
اگر محورهای مختصات را به موازات خود انتقال دهیم تا مبدأ مختصات بر رأس سهمی قرار گیرد، سهمی مورد نظر برسهمی $y=ax^2$ منطبق می‌شود.

مثال ۱ - رسم نمودار تابع $y=x^2+2x+2$

تابع به ازای همهٔ مقادیر x ، معین و پیوسته است.

مشتق $y'=2x+2$ ، به ازای $x=-1$ برابر صفر، به ازای $x>-1$ مثبت و به‌ازای $x<-1$ منفی می‌شود. درنتیجه، تابع مفروض به‌ازای $x>-1$ صعودی و به‌ازای $x<-1$ نزولی است و در نقطهٔ $x=-1$ ، مینیممی برابر ۱ دارد. جدول تغییرات و منحنی زیر نتیجه می‌شود:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	↘	۲	↘	۱ Min	↗	۲	↗	$+\infty$



برای دقت بیشتر دررسم منحنی، نقطهٔ برخوردآن بامحورعرض‌ها ونقطهٔ اضافی $(-2, 2)$ را در نظر گرفته‌ایم. منحنی این تابع، نقطهٔ برخوردی بامحور طول‌ها ندارد.

خط $x=-1$ محور تقارن این منحنی است.

مثال ۲- نمودار تابعی به‌معادلهٔ $y=-x^2+2x-1$ را رسم کنید.

الف ـ این تابع درفاصلهٔ ($+\infty$ و $-\infty$) معین وپیوسته است.

ب ـ مشتق تابع عبارت است از $y'=-2x+2$ که به‌ازای $x=1$ صفر می‌شود مشتق درسمت چپ ۱ مثبت و درسمت راست‌آن منفی است. بنابراین تابع درسمت چپ ۱ صعودی ودر سمت راست‌آن نزولی و به‌ازای $x=1$ ماکزیمم است و ماکزیمم تابع صفر می‌باشد.

ج ـ حدتابع وقتی x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند $-\infty$ است.

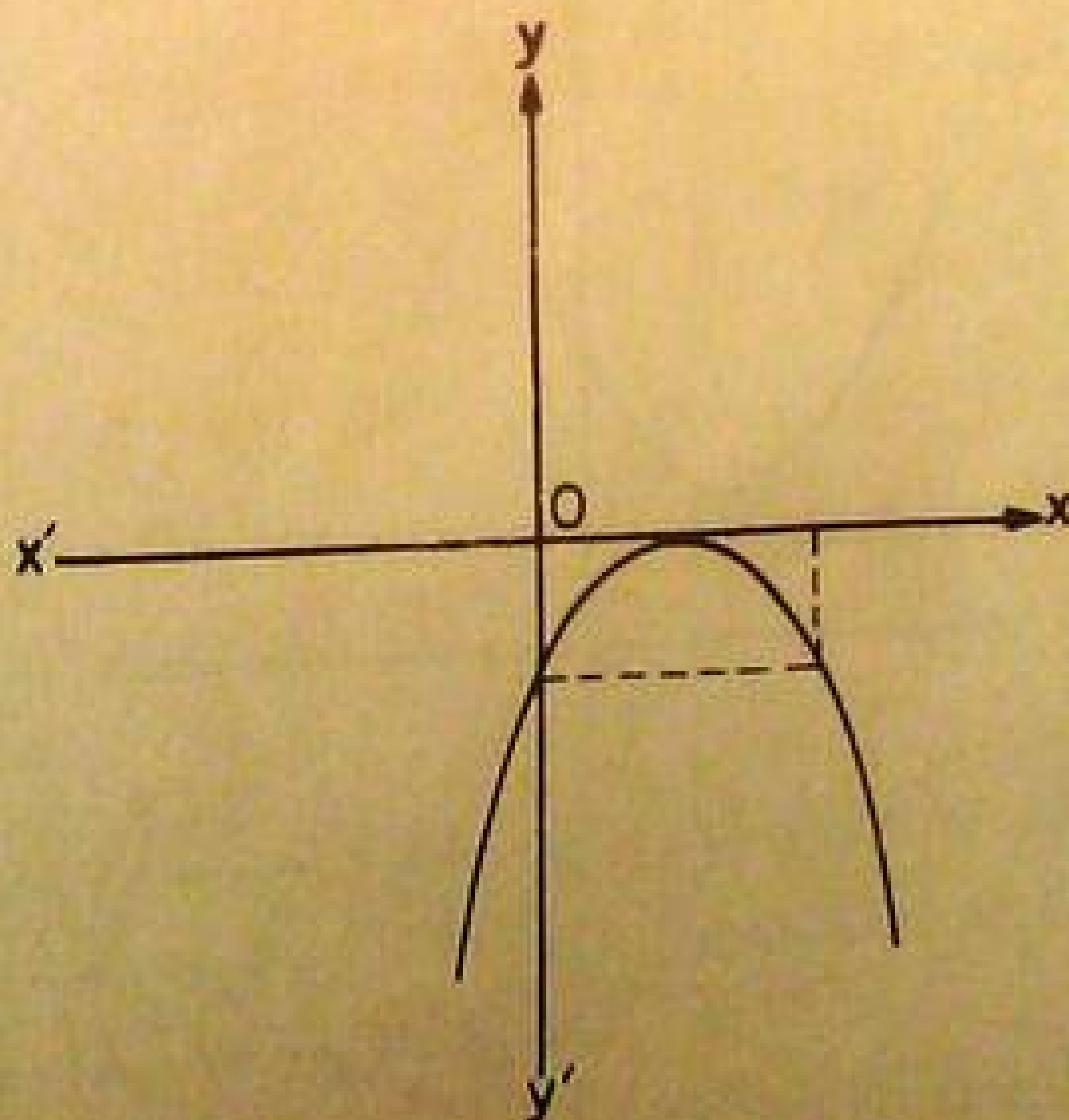
د ـ اگر $x=0$ باشدآنگاه $y=-1$ (نقطهٔ تلاقی با محور y ها) و اگر $y=0$ آنگاه $x=1$ (نقطهٔ تلاقی بامحور xها).

هـ ـ جدول تغییرات تابع عبارت است از:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+			۰		−		
y	$-\infty$	↗	-1	↗	۰	↘	-1	↘	$-\infty$

درصورتی که نقطه‌هایی که برای‌رسم نمودار تابع درنظر گرفته‌ایم‌کافی به‌نظرنرسد می‌توان با قراردادن چند مقدار دلخواه به‌جای x و محاسبهٔ y نظیرآنها تعداد بیشتری از نقطه‌های منحنی را به‌دست‌آورد. دراین مثال نقطهٔ (۱− و ۲) اضافه برنقطه‌های قبلی یافته شده است.

و ـ نمودار تابع در زیر رسم شده است.



تمرین

منحنی نمایش تغییرات این تابعها را رسم کنید:

۱- $y=\frac{1}{2}x^2$

۲- $y=-x^2+2$

۳- $y=x^2+4x$

۴- $y=-x^2+2x-4$

۵- $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$

۶- $y=(2+x)(x-1)$

۷- $y=3+2x-x^2$

۸- $y=3x^2+5$

۹- $y=-(2x-1)^2$

۱۰- a را طوری تعیین کنید که خط به معادلهٔ $x=1$ محور تقارن منحنی به معادله $y=x^2+ax$ باشد.

۱۱- تابع $y=x^2-1-m(x-1)$ مفروض است مقدار m را طوری پیدا کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع برمحور طول‌ها مماس‌باشد. به‌ازای مقادیری که برای m به‌دست می‌آورید منحنی تابع را رسم کنید.

۱۲- درتابع $y=ax^2+(3a+1)x-1$، مقدار a را طوری پیدا کنید که منحنی آن از مینیممی به‌طول ۲- بگذرد سپس به‌ازای این‌مقدار a منحنی تابع را رسم کنید.

۱۳- در تابع $y=x^2-ax+2$ مقدار a را طوری پیدا کنید که منحنی آن مینیممی مساوی ۱ داشته‌باشد (یعنی عرض نقطه مینیمم مساوی واحدباشد) وسپس بازای این‌مقدار a منحنی تابع را رسم کنید.

۱۴- دومنحنی به‌معادله‌های $y=x^2+x$ و $y=x^2-x+2$ دریک‌نقطه‌متقاطعند مختصات نقطه تقاطع را بدست‌آورید.

۱۵- درتابع $y=ax^2+bx+1$ مقادیر a و b را طوری‌پیدا کنید که‌منحنی آن درنقطه‌ای به‌طول $\frac{1}{2}$ برخط $y=3x+\frac{5}{4}$ مماس باشد و سپس منحنی و خط را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۱۶- درتابع $y=ax^2+bx+c$، مطلوبست محاسبهٔ‌مقادیر a و b و c، به‌شرطی که‌منحنی درنقطهٔ $(2,5)$ مینیمم ودر نقطه‌ای به‌طول $\frac{5}{2}$ برخطی موازی نیمساز ربع اول مماس باشد و سپس منحنی را رسم کنید.

۱۷- اولاً ثابت کنید که منحنی تابع $y=(m-2)x^2+mx+1-2m$ به‌ازای همهٔ مقادیر m از دونقطه ثابت A, B می گذرد. مختصات این دونقطه را پیدا کنید.

ثانیاً به‌ازای چه‌مقداری از m تابع فوق به‌خط راست تبدیل میشود، چرا این خط راست همان خطی است که از A و B می گذرد؟

ثالثاً مکان هندسی راس سهمی فوق را پیدا کنید و بگوئید کدام قسمت آن مربوط به‌موقعی است که این منحنی ماکزیمم دارد و کدام قسمت مربوط به‌موقعی است که منحنی مینیمم دارد؟

۱۸ـ اولاً منحنی تابع $y=x^{2}-2x$ و $y=-x^{2}-2x+2$ را در یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ثانیاً مختصات نقطه‌های برخورد دومنحنی را پیدا کنید و تانژانت زاویهٔ بین دومنحنی را در نقطه‌های برخورد بدست آورید.

۲ـ تابع چندجمله‌ای درجه سوم

مشتق تابع درجهٔ سوم $y=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$، عبارت است از:

$$y'=3ax^{2}+2bx+c$$

که خود تابعی است از درجهٔ دوم. حالتهای مختلف منحنی تابع درجهٔ‌سوم، به‌حالتهای این‌عبارت درجهٔ دوم مشتق مربوط می‌شود. برای $y'=0$، سه‌حالت پیش می‌آید: ۱) این‌معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی ومتمایز باشد، ۲) دو ریشه مساوی داشته باشد، ۳) دوریشهٔ موهومی داشته باشد.

برای رسم منحنی تابع درجهٔ سوم، علاوه برجهت تغییرات و نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم، پیداکردن نقطهٔ عطف (به خصوص برای حالتی که منحنی ماکزیمم و مینیمم ندارد)، به‌دقت رسم منحنی کمك می کند.

برای توابع درجه سوم نقطه عطف مرکز تقارن منحنی نمودارآنها می‌باشد، یعنی‌هرخطی که ازاین نقطه بگذرد و منحنی را در دونقطه دیگر قطع کند نقطه عطف‌وسط این دونقطه‌است.

روش رسم منحنی را برای سه‌حالت یادشده، به‌کمك چند مثال روشن می کنیم.

مثال ۱

$$y=x^{3}-3x+1$$

تابع، برای همهٔ مقادیر حقیقی x، معین وپیوسته است و معلوم است که وقتی $x\to\pm\infty$، داریم $y\to\pm\infty$.

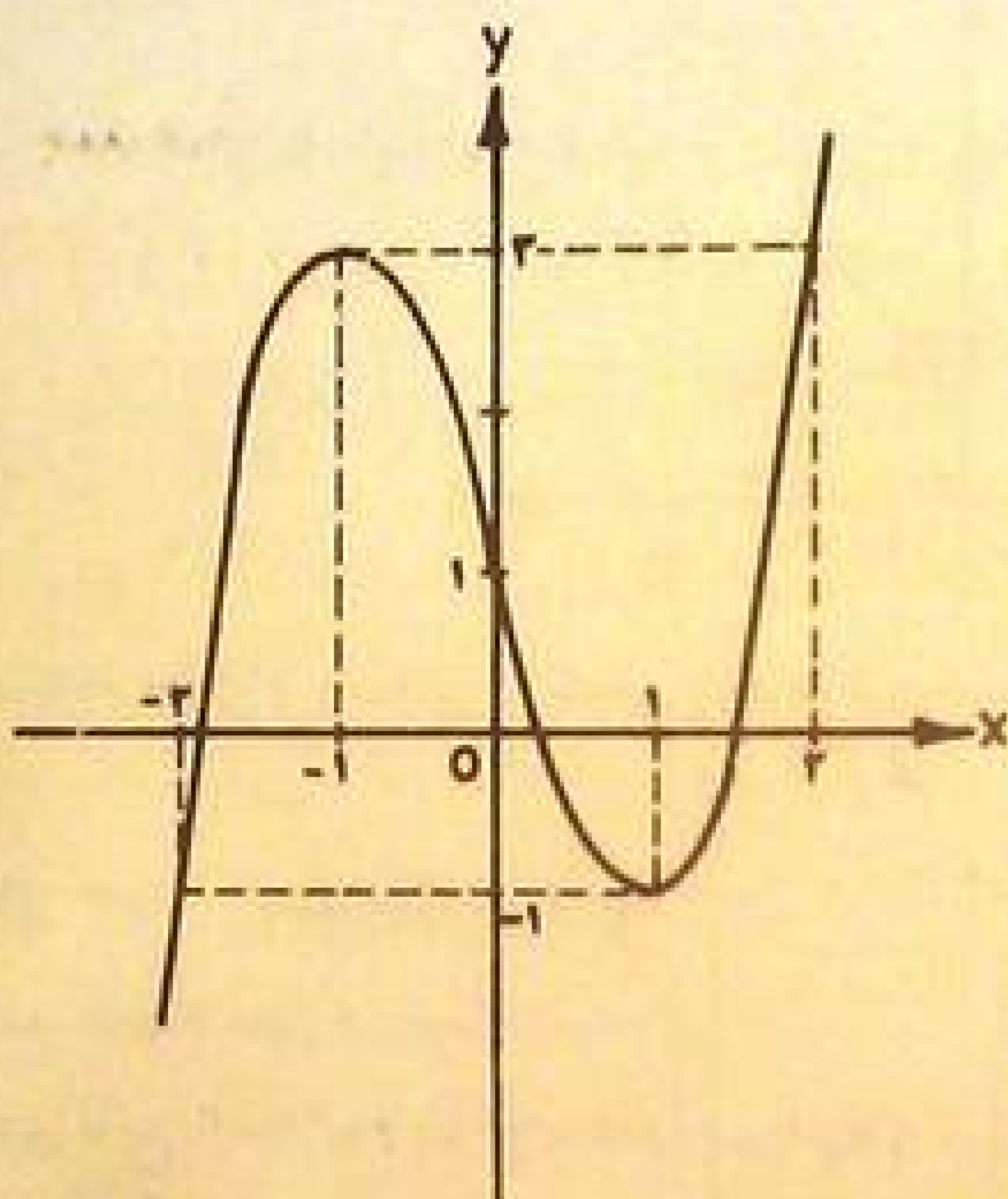
مشتق $y'=3x^{2}-3$ به‌ازای $x=\pm1$ برابرصفرمی‌شود، درفاصله‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ مثبت و درفاصلهٔ $(-1,+1)$، منفی است.

مشتق دوم $y''=6x$ درنقطهٔ $x=0$ تغییر علامت می‌دهد و بنابراین نقطهٔ $(0\ ,\ 1)$، نقطهٔ عطف منحنی است ومماس دراین نقطه، ضریب زاویه‌ای مساوی -3 دارد.

جدول تغییرات تابع چنین است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3 Max	$\searrow$	1	$\searrow$	-1 Min	$\nearrow$	$+\infty$

منحنی در نقطهٔ $(-1, 3)$ ماکزیمم و در نقطهٔ $(1, -1)$ مینیمم نسبی دارد. برای دقت بیشتر در رسم منحنی تابع، بهتر است دو نقطهٔ اضافی را، یکی قبل و دیگری بعد از اکسترممها، پیدا کنیم: $(-2, -1)$ و $(2, 3)$.



از روی شکل معلوم است که معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-3x+1=0$، دارای سه جواب است (منحنی $y=x^3-3x+1$، محور طول را در سه نقطه قطع می‌کند). مقدار جوابها هم با تقریب از روی شکل معلوم می‌شود:

$$-2<x_1<-1 \quad , \quad 0<x_2<1 \quad , \quad 1<x_3<2$$

مثال ۲ - $y=x^3+1$

تابع به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، معین و پیوسته است.

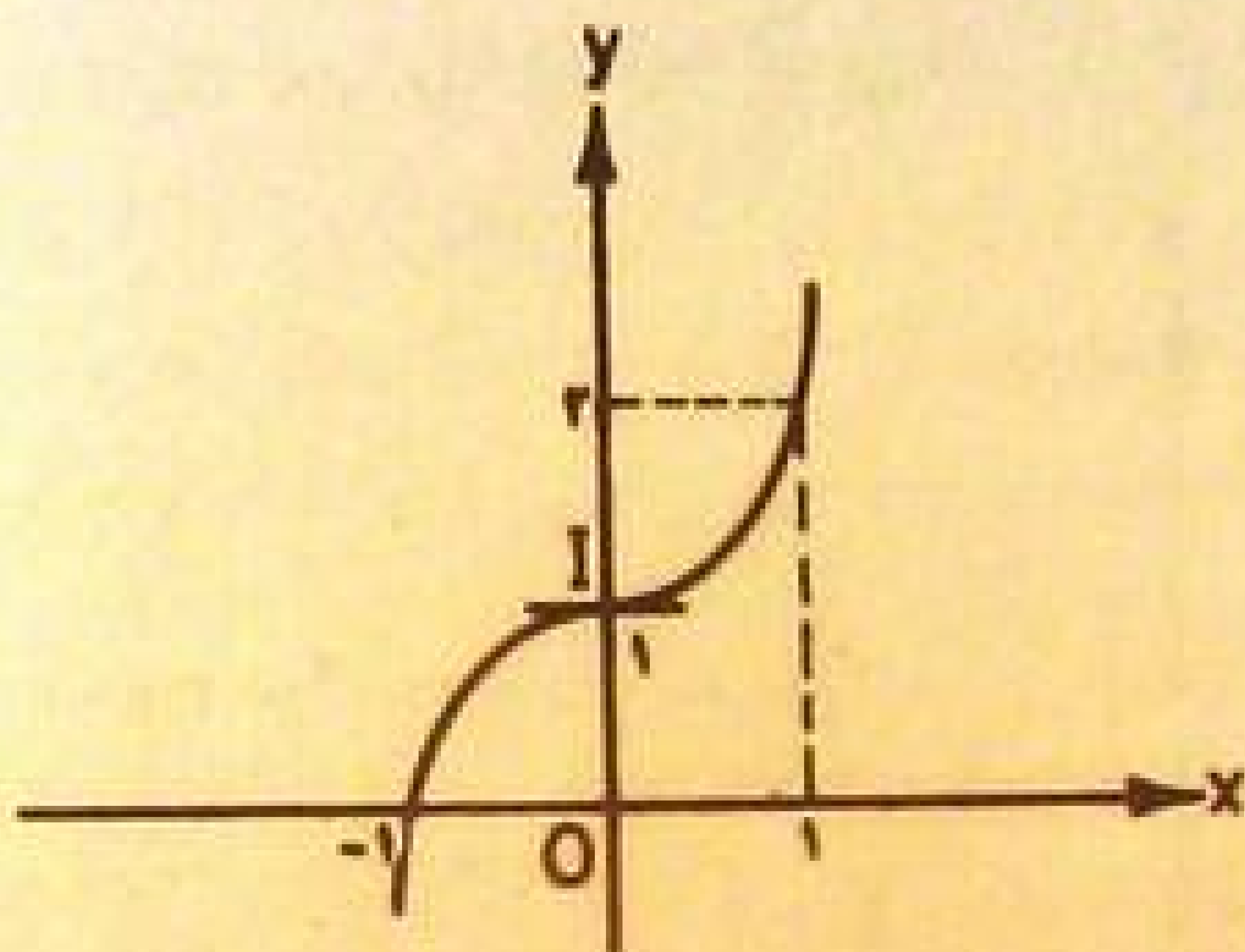
مشتق آن $y'=3x^2$ به‌ازای $x=0$ برابر صفر است، ولی علامت عوض نمی کند وهمواره مثبت است. بنابراین تابع مفروض، همیشه صعودی است.

مشتق دوم تابع $y''=6x$ به ازای $x=0$ برابر صفر است و درآنجا تغییرعلامت می‌دهد. نقطهٔ $(0, 1)$، نقطهٔ عطف منحنی و مماس در آن بر منحنی، موازی با محور طول است (مشتق

در این نقطه برابر صفر است).

جدول تغییرات و منحنی تابع (با دو نقطهٔ کمکی که قبل و بعد از نقطهٔ عطف انتخاب کرده‌ایم) چنین است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+			0		+		
y	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	2	↗	$+\infty$



در نقطهٔ عطف I، مماس بر منحنی (که موازی محور طول است)، از منحنی عبور کرده است.

مثال ۳ - $y=x^3+x+2$

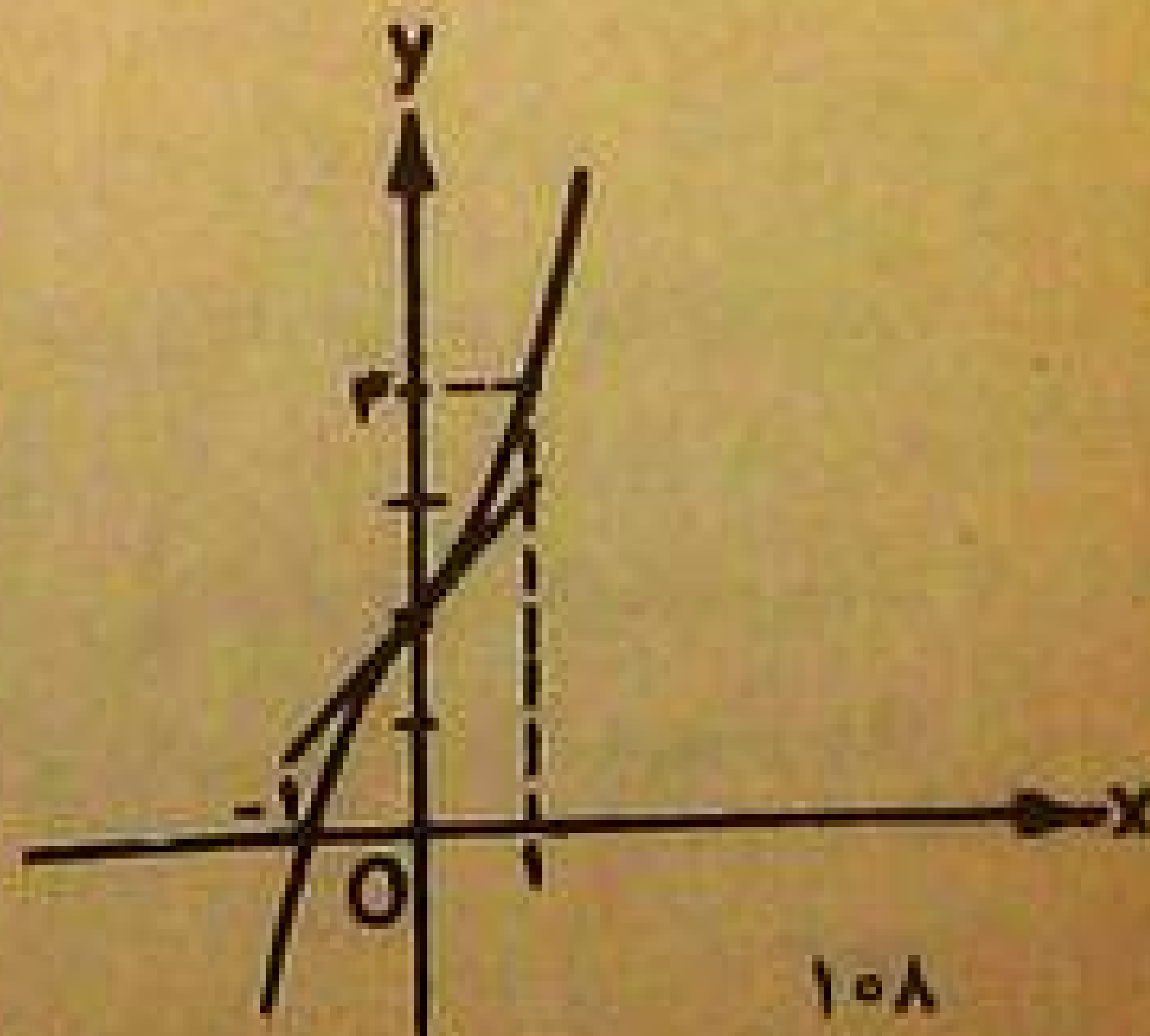
تابع، همیشه معین و پیوسته است.

مشتق تابع $y'=3x^2+1$، صفر نمی‌شود و همیشه مثبت است و در نتیجه، تابع همواره صعودی است.

مشتق دوم تابع $y''=6x$ به ازای $x=0$ برابر صفر می‌شود و در آنجا تغییر علامت می‌دهد. بنابراین نقطهٔ $(0\,,2)$، نقطهٔ عطف منحنی است وضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی درآنجا مساوی واحد است $(f'(0)=1)$.

جدول تغییرات و منحنی تابع (با دو نقطهٔ کمکی) در زیر داده شده است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+			1		+		
y	$-\infty$	↗	0	↗	2	↗	4	↗	$+\infty$



برای دقت بیشتر، مماس برمنحنی در نقطهٔ عطف را رسم کنید و توجه داشته باشید که در این نقطه، خط مماس از منحنی عبور می کند.

۴ـ بررسی معادله‌ها به‌کمک رسم منحنی

مثال ۱ - در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر، برحسب مقادیر مختلف m ، بحث کنید:

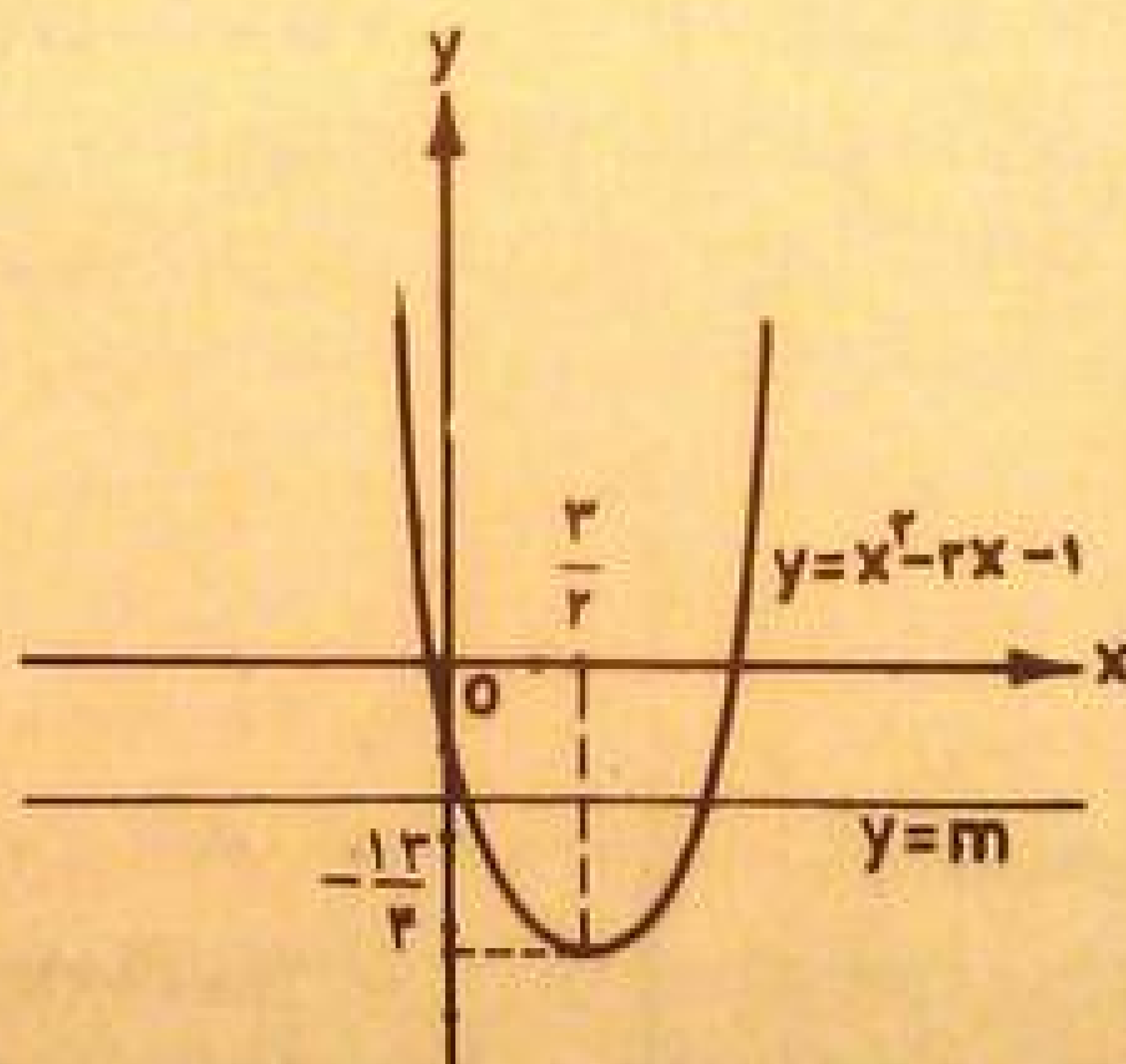
$$x^{2}-3x-m-1=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$x^{2}-3x-1=m$$

از اینجا معلوم می‌شود که ریشه‌های معادلهٔ (۱)، عبارتند از طولهای نقطه‌های برخورد منحنی $y=x^{2}-3x-1$ باخط $y=m$.

منحنی تابع $y=x^{2}-3x-1$ را رسم می کنیم. این منحنی درنقطهٔ $\left(\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$ مینیمم است و درنقطهٔ $(0,-1)$ محور عرض‌ها را قطع می کند.



خط $y=m$ (که خطی موازی محور طول‌ها است)، بسته به‌مقدار m، می‌تواند منحنی‌را در دونقطه قطع کند، برآن مماس باشد ویا اصلا نقطهٔ برخوردی باآن نداشته باشد.

از روی شکل معلوم است که:

برای $m<-\frac{13}{4}$، خط $y=m$، سهمی $y=x^{2}-3x-1$ را قطع نمی کند، یعنی معادلهٔ (۱) به‌ازای $m<-\frac{13}{4}$، ریشهٔ حقیقی ندارد.

برای $m=-\frac{13}{4}$، خط بر سهمی مماس است و نقطهٔ تماس طولی مثبت دارد، یعنی معادلهٔ (۱) به‌ازای $m=-\frac{13}{4}$ دارای دو ریشهٔ مساوی مثبت می‌باشد.

برای $-\frac{13}{4}<m<-1$، خط، سهمی را در دو نقطه به طولهای مثبت قطع می‌کند، یعنی، معادلهٔ (۱) به ازای $-\frac{13}{4}<m<-1$، دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است.

برای $m=-1$، خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند؛ طول یکی از این نقطه‌ها مساوی صفر و طول دیگری مقداری مثبت است، یعنی به‌ازای $m=-1$، معادلهٔ (۱) دارای یک ریشهٔ مساوی صفر و یک ریشهٔ مثبت است.

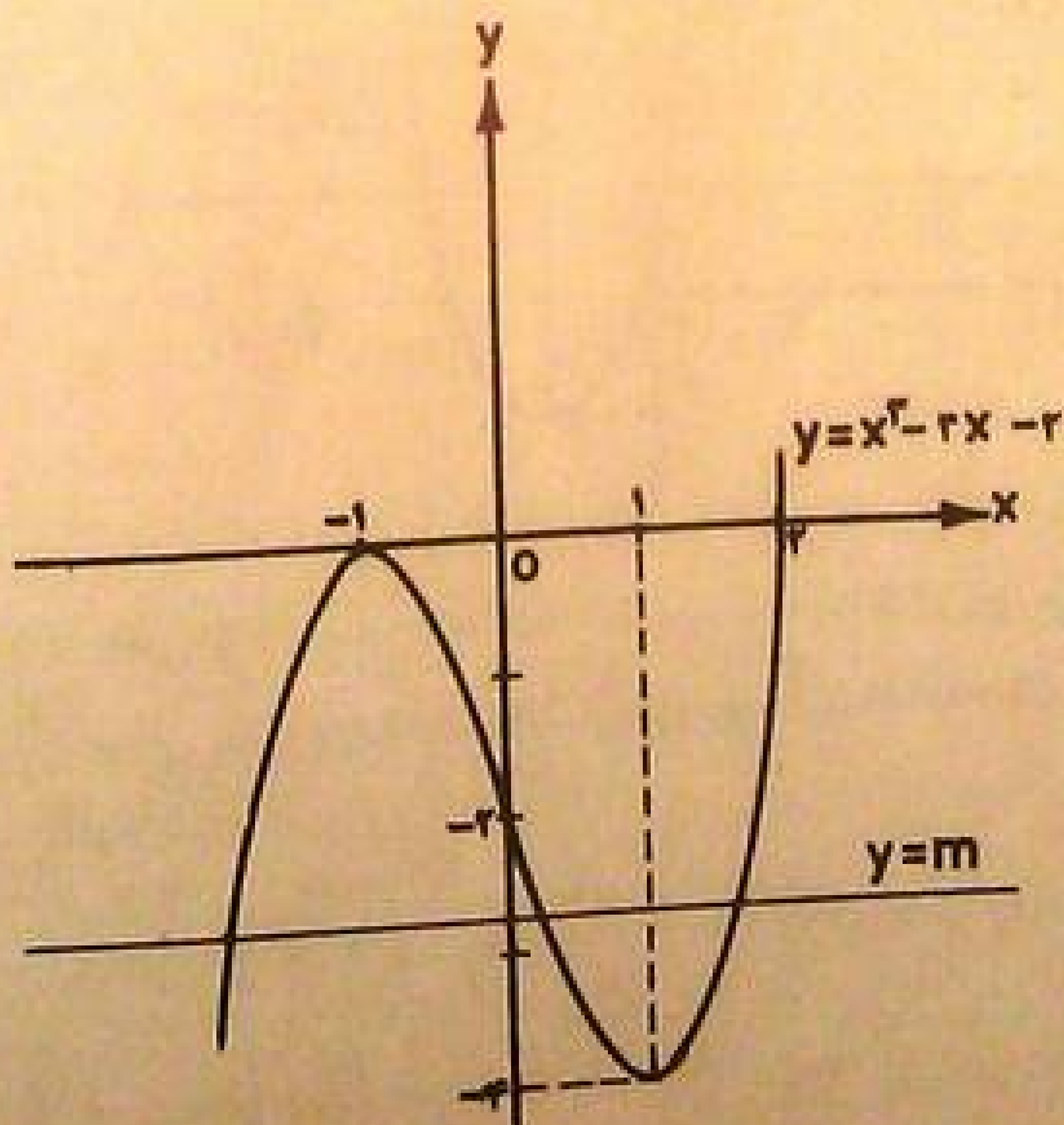
برای $m>-1$، خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند؛ طول یکی از این نقطه‌ها مثبت و طول دیگری منفی است، یعنی معادلهٔ (۱) به ازای $m>-1$ دارای دو ریشهٔ حقیقی با علامتهای متفاوت است.

مثال ۲ - در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم زیر بحث کنید:

$$x^3-3x-m-2=0 \qquad (2)$$

اگر معادله را به‌صورت $x^3-3x-2=m$ بنویسیم، باید در وجود و علامت طولهای نقطه‌های برخورد منحنی $y=x^3-3x-2$ با خط $y=m$ بحث کنیم.

منحنی تابع $y=x^3-3x-2$ را رسم می‌کنیم.



منحنی، درنقطهٔ $(-1,0)$ ماکزیمم و درنقطهٔ $(1,-4)$ مینیمم است و درنقطهٔ $(-2,0)$ محور عرضها را قطع می کند. از روی شکل، شبیه مثال قبل نتیجه می‌شود:

۱) $m<-4$: معادلهٔ (۲) دارای یک‌ریشهٔ حقیقی منفی است.

۲) $m=-4$: معادلهٔ (۲)، یک‌ریشهٔ مضاعف مثبت و یک‌ریشهٔ سادهٔ منفی دارد.

۳) $-4<m<-2$: معادلهٔ (۲)، دوریشهٔ مثبت ویک ریشهٔ منفی دارد.

۴) $m=-2$: معادلهٔ (۲)، یک ریشهٔ مساوی صفر، یک ریشهٔ مثبت ویک ریشهٔ منفی دارد.

۵) $-2<m<0$: معادلهٔ (۲)، دوریشهٔ منفی ویک ریشهٔ مثبت دارد.

۶) $m=0$: معادلهٔ (۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی و یک‌ریشهٔ سادهٔ مثبت دارد.

۷) $m>0$: معادلهٔ (۲) تنها یک ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

تمرین

منحنی نمایش تغییرات این تابعها را رسم کنید:

۱ـ $y=-x^3+3x^2$ ‏ ‏ ‏ ۲ـ $y=2x^3-3x^2+1$

۳ـ $y=(x-1)^3$

۴ـ $y=(x-1)(x+1)(x-2)$ ‏ ‏ ‏ ۵ـ $y=(x+1)(x^2+x+1)$

۶ـ $y=(x+1)(x-1)^2$ ‏ ‏ ‏ ۷ـ $y=(x^2-4)(x-1)$

۸ـ $y=(1-x^2)(x+2)$

۹ـ هر یک از دو منحنی تابعهای $y=-x^2$ و $y=x^3+2x^2-4$ را رسم کنید و مختصات نقطه‌های برخورد آنها را پیدا کنید.

۱۰ـ تابع $y=x^3+px^2+qx+r$ مفروض است.

اولاً مطلوبست تعیین مقادیر p و q و r به شرطی که y بازاء $x=-1$ برابر صفر شود به ازای $x=-2$ دارای یک ماکزیمم یا مینیمم مساوی ۱ باشد.

ثانیاً منحنی (c) تابع $y=(x+1)(x^2+3x+1)$ را رسم کنید.

ثالثاً اگر A نقطه‌ای ازمنحنی به طول -1 باشد معادلهٔ خط d را بنویسید که از A بگذرد و ضریب زاویه‌ای مساوی m داشته باشد. طولهای نقطه‌های برخورد دیگر خط (d) با منحنی (c) را پیداکنید (برحسب مقادیر m بحث کنید).

۱۱ـ اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3+2x^2-4$ را رسم کنید. ثانیاً به کمک این منحنی دروجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ $x^3+2x^2-(m+4)=0$ برحسب مقادیرمختلف m بحث کنید.

۱۲ـ اولاً تغییرات تابع $y=x^3-6x+5$ را بررسی کنید و منحنی نمایش تغییرات

آن را رسم کنید.

ثانیاً اگر I، نقطه برخورد منحنی با محورعرض باشد، نشان دهید که I مرکز تقارن منحنی است.

ثالثاً از روی منحنی برحسب مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های این معادله بحث کنید:

$$x^3-6x+5-m=0$$

۱۳- اولا تابع $y=x^3-3x+2$ را بررسی و منحنی آن را رسم کنید.

ثانیاً نقطه‌های برخورد منحنی را با محورهای مختصات و معادلهٔ مماسهای بر منحنی دراین نقطه‌ها را پیدا کنید.

ثالثاً مختصات نقطه‌ای از منحنی را پیدا کنید که مماس در آنجا با خط $9x+2y=0$ موازی باشد.

۱۴- اولا بازای چه مقادیری از m منحنی (c) نمایش تابع $y=x^3-3mx+2$ دارای مماسهای موازی محور طول است؟ مختصات نقاط تماس را برحسب m پیدا کنید.

ثانیاً m را طوری پیدا کنید که (c) برمحور xها مماس باشد، و منحنی نظیر آن را رسم کنید.

ثالثاً برحسب مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌های این معادله بحث کنید:

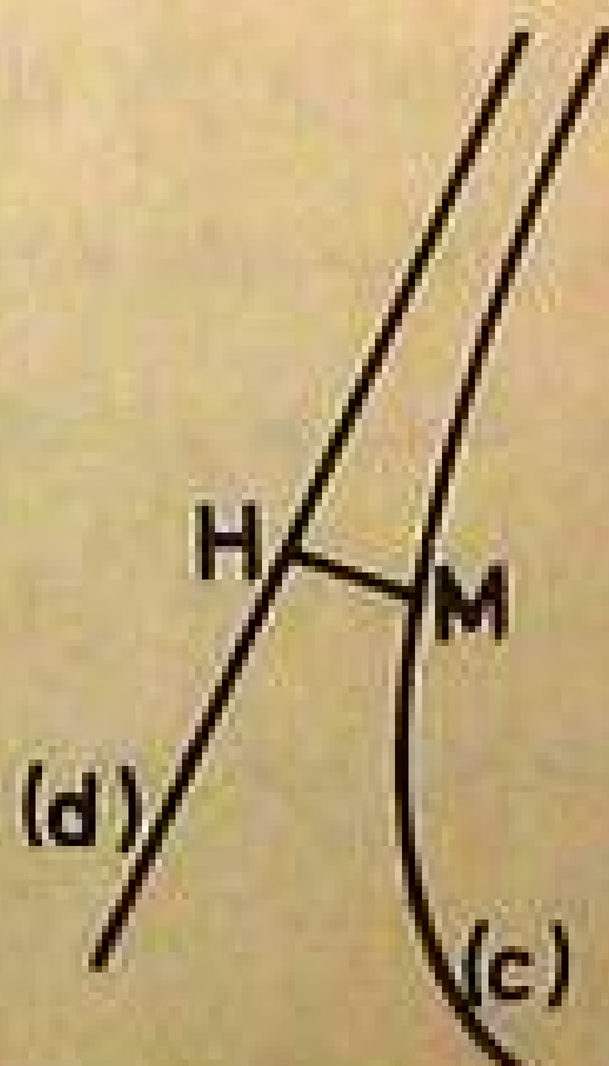
$$x^3-3mx+2=0$$

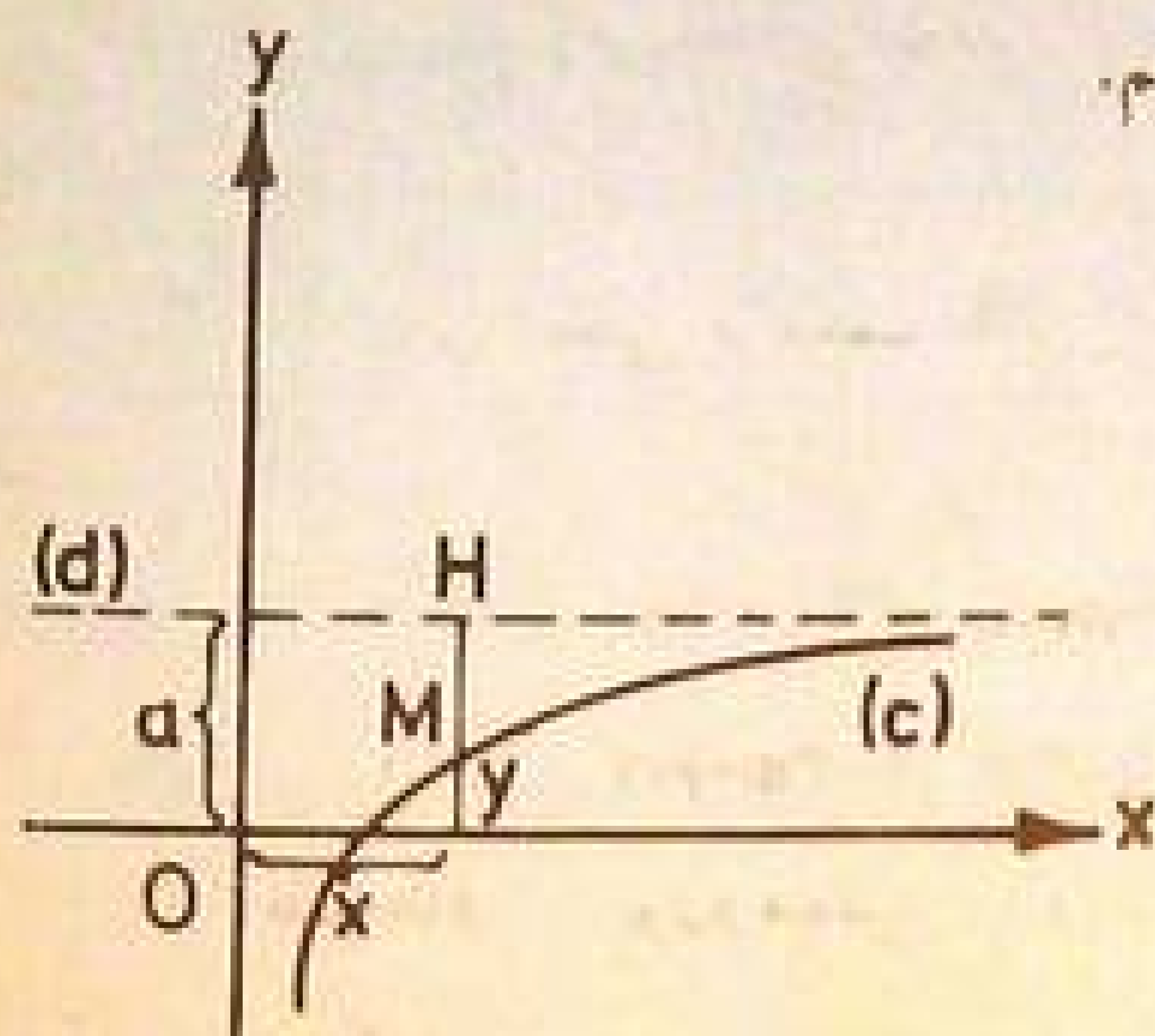
۱۵- تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است اولا ضرایب a و b و c را طوری معین کنید که منحنی تابع فوق از نقطه $M(3,0)$ عبور نموده و در مبداء مختصات ماکزیمم یا می‌نیمم باشد.

ثانیاً منحنی تابع $y=x^3-3x^2$ را رسم کنید. ثالثاً از مبداء مختصات به‌نقطهٔ p به طول $x=2$ واقع برمنحنی وصل می‌کنیم. ثابت کنید که نقطهٔ D وسط قطعه خط OP واقع برمنحنی است و ضریب‌زاویه خطی را حساب کنید که از نقطهٔ D گذشته و با خط OP زاویهٔ 45° تشکیل دهد.

۴- مجانب

M را نقطه‌ای از منحنی (C) و MH را، فاصلهٔ این نقطه از خط d، می‌گیریم: خط راست d را، مجانب منحنی (C) گویند، وقتی‌که اگر M روی منحنی به سمت بی‌نهایت میل کند، فاصلهٔ MH به سمت صفر میل کند.





دو حالت خاص خط مجانب را، وقتی که موازی یکی از محورهای مختصات باشد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) مجانب موازی محور طول ـ اگر خط $y=a$، مجانب منحنی تابع $y=f(x)$ باشد، وقتی که M به‌سمت بی نهایت میل می‌کند، x هم به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد و بنابراین باید داشته باشیم (شکل را ببینید):

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ MH=0$$

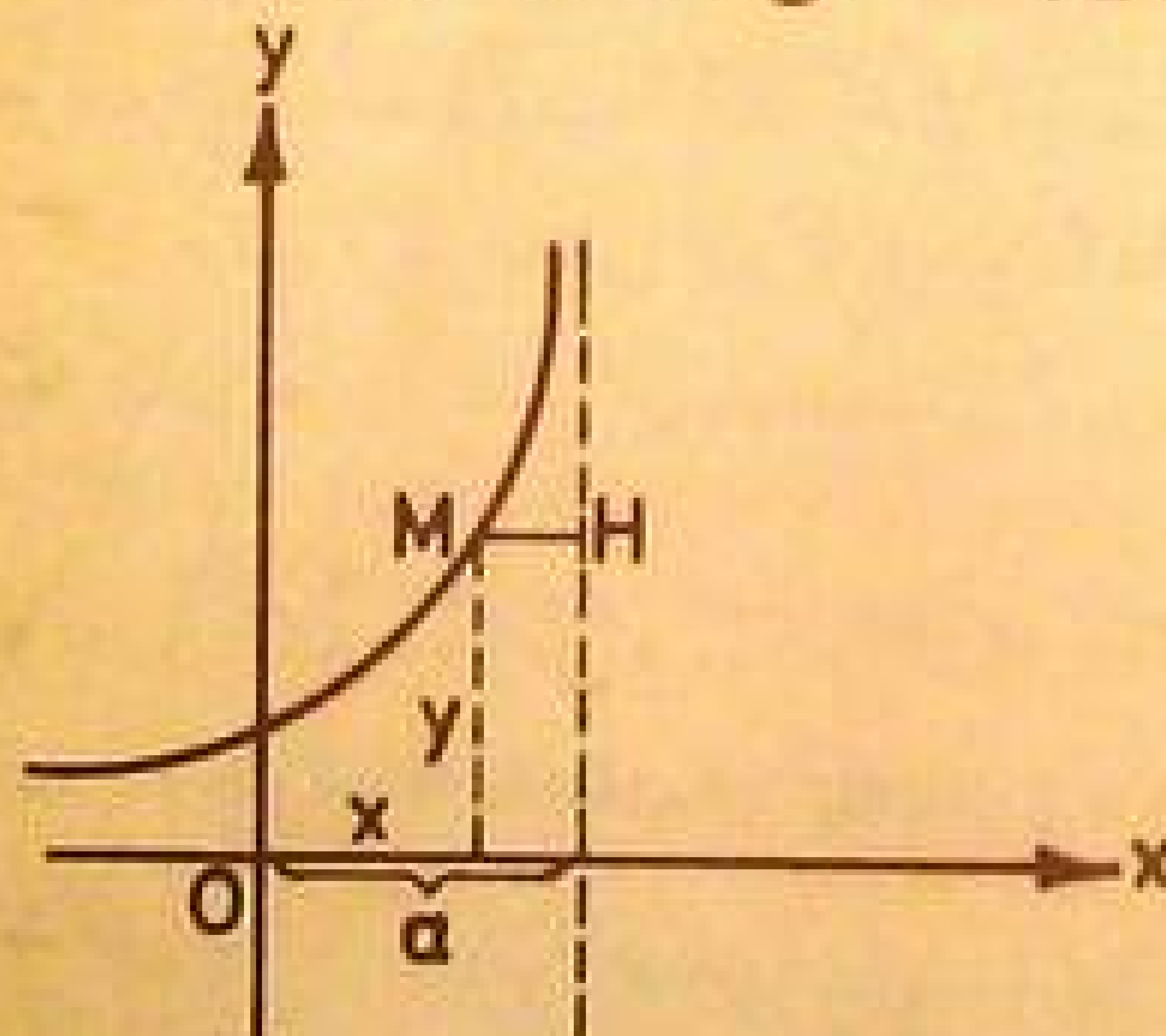
از طرف دیگر داریم:

$$MH=a-f(x)\text{ ،}\quad \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ MH=a-\text{حد}\ f(x)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ f(x)=a$$

به‌این ترتیب، اگر در تابع $y=f(x)$، با میل x به‌سمت بی‌نهایت، مقدار $f(x)$ به‌سمت عددی مثل a میل کند، خط $y=a$، مجانب منحنی آن خواهد بود.



مجانب موازی محور طول‌ها را، مجانب افقی هم گویند.

ب) مجانب موازی محور عرض‌ها ـ شبیه حالت قبل، می‌توان ثابت کرد که اگر داشته باشیم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=\infty$$

در این صورت، خط $x=a$، مجانبی از منحنی تابع $y=f(x)$ است. مجانب موازی محور عرض را، مجانب قائم هم گویند.

مثال ـ مجانبهای افقی و قائم منحنی (C) از تابع $y=\dfrac{x+1}{2-x}$ را پیدا کنید.

داریم:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{x+1}{2-x}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=-1$$

و بنابراین خط $y=-1$، مجانب افقی منحنی (C) است.

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{3-x}=\infty$$

و بنابراین خط $x=3$، مجانب قائم این منحنی است.

باید توجه داشت که دراینجا، حد چپ وحد راست تابع با هم فرق دارد زیرا:

$$\lim_{x\to 3-\varepsilon}\frac{x+1}{3-x}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 3+\varepsilon}\frac{x+1}{3-x}=-\infty$$

حال، به بررسی تغییرات تابع $y=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ (که به‌آن تابع هموگرافیك هم می گویند) می‌پردازیم.

مشتق این تابع بصورت $y'=\dfrac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$ در می‌آید که برای همهٔ مقادیر $x\neq-\dfrac{b'}{a'}$ معنی دارد. این مشتق دارای علامتی ثابت است: در حالت منفی بودن $ab'-ba'$، منفی و در حالت مثبت بودن $ab'-ba'$، مثبت است.

برای رسم منحنی این تابع، باید علاوه بر نکته‌هایی که در بارهٔ چندجمله‌ایها ذکر کردیم، مجانبهای افقی و قائم آن را هم معین کنیم.

مثال ۱ - مطلوب است بررسی تغییرات تابع $y=\dfrac{1}{x}$ و رسم منحنی آن.

تابع در فاصله‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ ، معین و پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

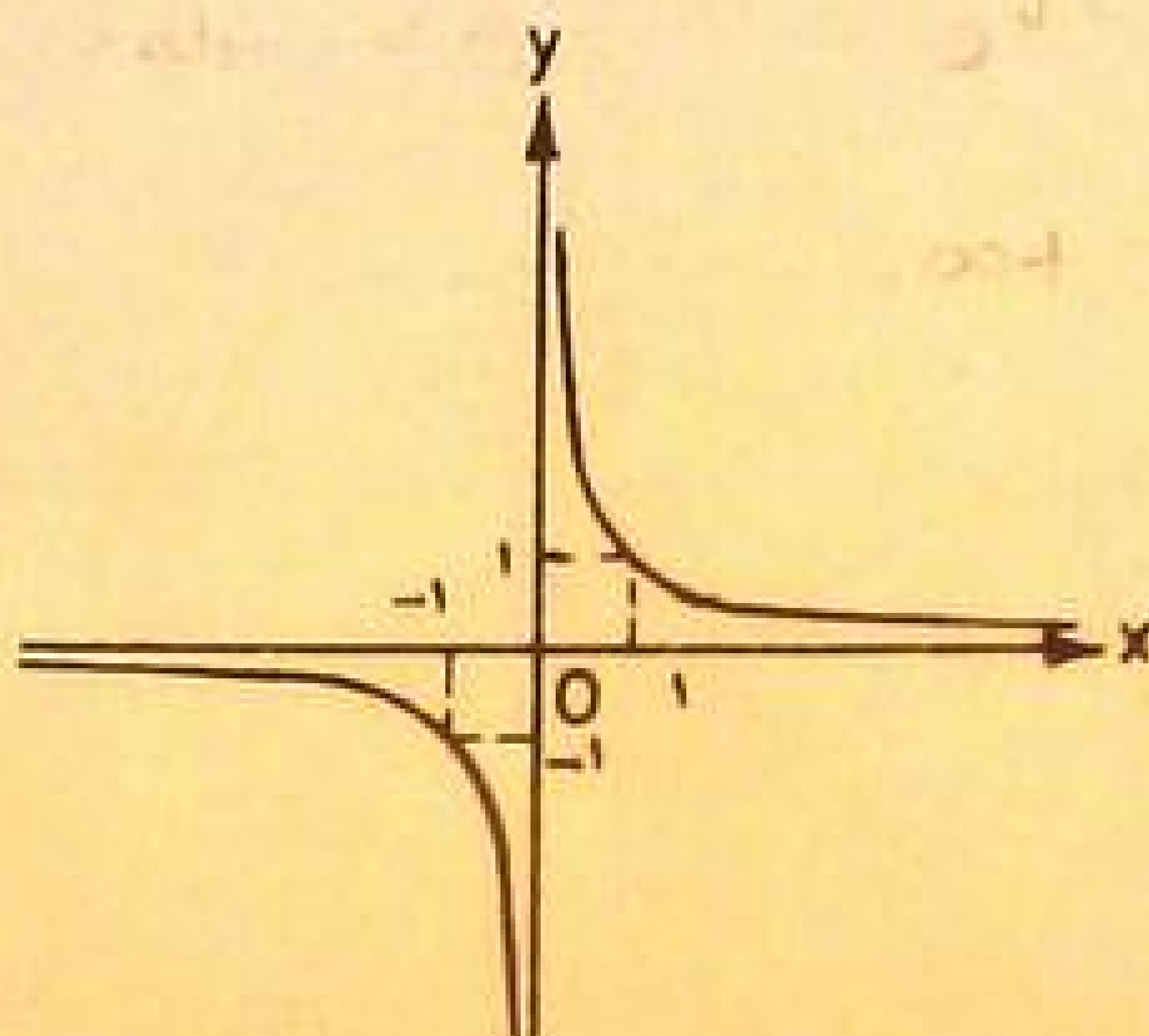
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

بنابراین، خطهای $x=0$ و $y=0$ (یعنی محورهای مختصات)، مجانبهای منحنی هستند.

مشتق تابع $y'=-\dfrac{1}{x^2}$، همواره منفی وتابع، همیشه نزولی است. جدول تغییرات ومنحنی

تابع در زیر داده شده است.

x	$-\infty$		-1		0^-	0	0^+		1		$+\infty$
y'			$-$			▨			$-$		
y	0	↘	-1	↘	$-\infty$	▨	$+\infty$	↘	1	↘	0



نقطه‌های (−۱ , −۱) و (۱ , ۱) را برای دقت بیشتر در رسم منحنی، وارد جدول کرده‌ایم.

توضیح: منحنی تابع هموگرافیك را هذلولی هم گویند. در هذلولی، محل برخورد مجانبها، مرکز تقارن منحنی است و بنابراین، کافی است یکی از شاخه‌های منحنی را رسم کنیم و سپس قرینهٔ آن را، نسبت به محل برخورد مجانبها به دست آوریم.

مثال ۲ ـ مطلوب است بررسی تغییرات تابع $y=\frac{2}{x-1}$ و رسم منحنی آن.

تابع در فاصله‌های $(-\infty , 1)$ و $(1 , +\infty)$، معین و پیوسته است.

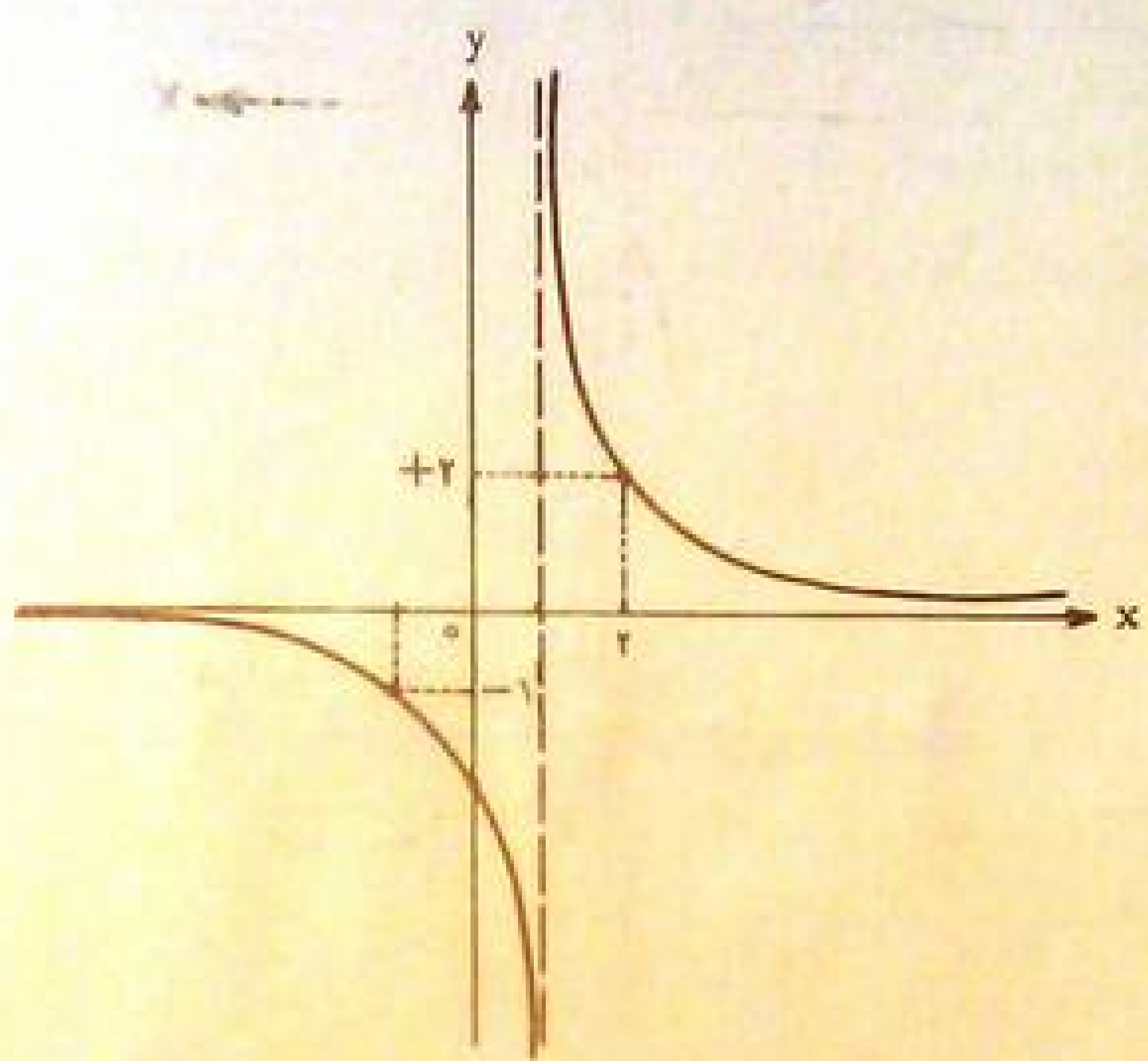
تابع، به ازای $x=1$ نامعین است، ولی اگر $x\to 1^-$، آنگاه $y\to -\infty$ و اگر $x\to 1^+$، آنگاه $y\to +\infty$ و بنابراین خط $x=1$ مجانب منحنی است. ضمناً داریم:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ \frac{2}{x-1}=0$$

و خط $y=0$ (محور طول) مجانب دیگر منحنی است.

مشتق تابع $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$ همیشه منفی $(x\neq 1)$ و تابع همواره نزولی است.

x	$-\infty$		0		1^-	1	1^+		2		$+\infty$
y'		$-$				‖			$-$		
y	0	↘	-2	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	2	↘	0



$\omega(1, 0)$ (محل برخورد مجانبها) ، مرکز تقارن منحنی است.

مثال ۴ - مطلوب است بررسی تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ و رسم منحنی آن.

تابع، به ازای همهٔ مقادیر $x\neq -1$ ، معین و پیوسته است و داریم:

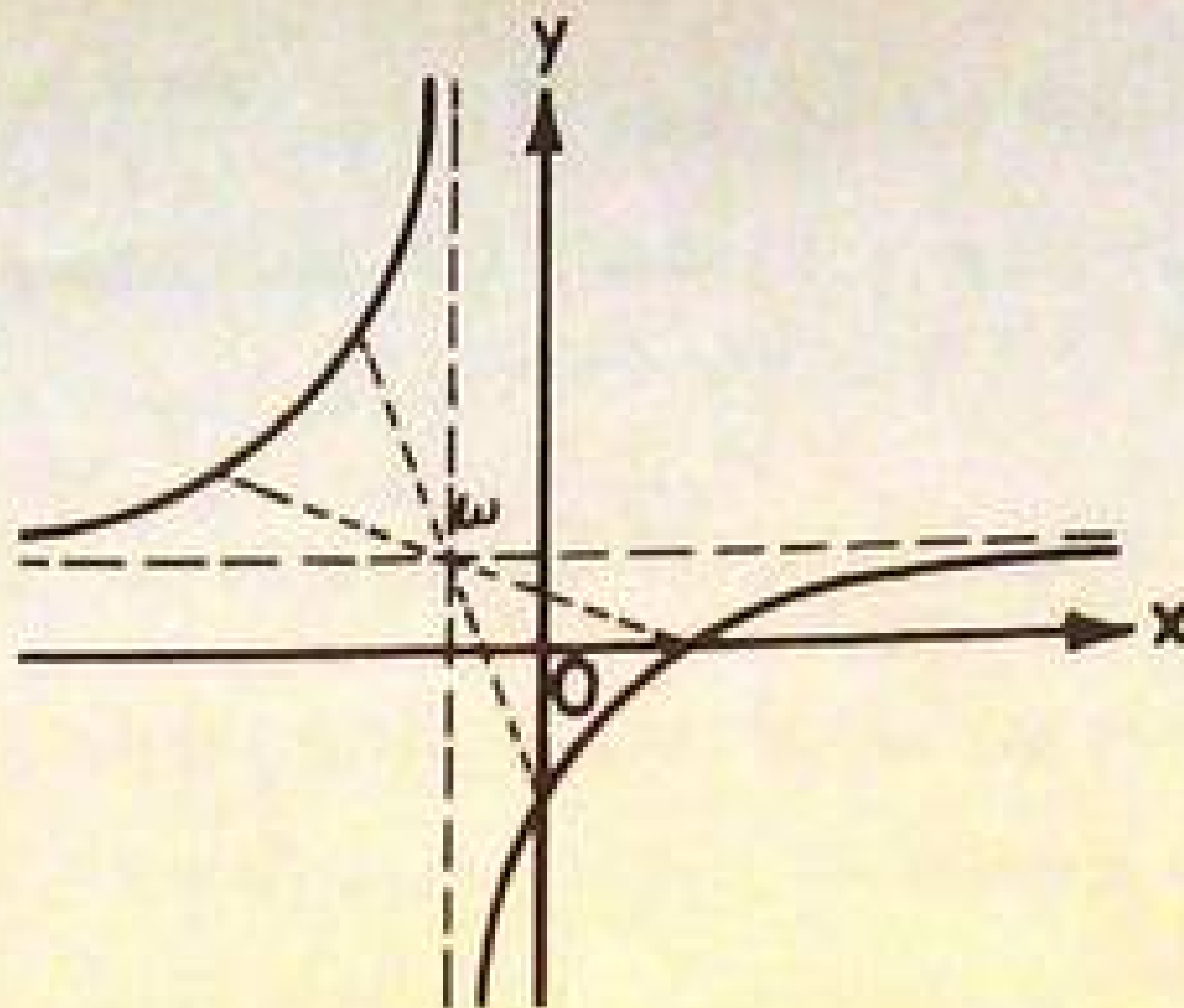
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x+1}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$$

خطهای $x=-1$ و $y=1$ ، مجانبهای منحنی و نقطهٔ $\omega(-1 , 1)$ مرکز تقارن آن است.

مشتق تابع $y'=\frac{2}{(x+1)^2}$ همیشه مثبت و بنابراین تابع ، همیشه صعودی است.

x	$-\infty$		-1^-	-1	-1^+		0		1		$+\infty$
y'		$+$		‖			$+$				
y	1	↗	$+\infty$	‖	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1



تمرین

منحنی نمایش تغییرات این تابعها را رسم کنید:

۱- $y=-\frac{x}{1-2x}$ ۲- $y=\frac{2x-1}{x+2}$

۳- $y=\frac{1}{2x}$ ۴- $y=\frac{-1}{x}$

۵- $y=\frac{2x-1}{x}$ ۶- $y=\frac{2}{x-1}$

۷- $y=\frac{3x-2}{x+2}$ ۸- $y=\frac{x-3}{1-2x}$

۹- $y=\frac{x+3}{x-3}$

۱۰- تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ مفروض است. اولاً جدول تغییرات و نمودار آن را رسم کنید ثانیاً معادلهٔ خط مماس برآن را در نقطهٔ به طول ۳ بنویسید. ثالثاً اگر A به عرض ۱ — واقع بر خط مماس فوق باشد تحقیق کنید آیا از نقطه A می‌توان مماس دیگری براین منحنی رسم کرد یا خیر در صورت وجود معادلهٔ آنرا بنویسید.

۱۱- تابع $y=\frac{ax+b}{cx+4}$ مفروض است اولا a و b و c را چنان تعیین کنید که خطوط $y=1$ و $x=-2$ مجانبهای منحنی باشند و منحنی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند. ثانیاً جدول تغییرات ونمودار تابع $y=\frac{x-2}{x+2}$ را رسم کنید.

۱۲- تابع $y=\frac{ax+1}{x+a}$ مفروض است. اولاً a را طوری معین کنید که نمودار تابع فوق با خط $x=-2$ مجانب باشد. ثانیاً از نقطه $M(-1, 3)$ می‌توان دو مماس بر منحنی رسم کرد معادلهٔ این دو مماس را بنویسید.

۱۳- اولاً منحنی تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{x-3}$ را رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که خط $y=mx$ منحنی را همیشه در دو نقطه A و B قطع می‌کند. ثالثاً مختصات نقطه p وسط قطعه خط AB را برحسب m حساب نمائید و معادلهٔ نموداری را تعیین کنید که نقطه p وقتی m تغییر می‌کند روی آن تغییر مکان می‌دهد.

۱۴- تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را مشخص کنید به شرطی که $\omega(3, 1)$ مرکز تقارن آن باشد و از نقطه $(2, 8)$ هم عبور کند. سپس منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۱۵- تابع $y=\frac{2(a-1)x+3}{2ax+4a-2}$ مفروض است.

الف- معلوم کنید که این تابع به‌ازای چه مقادیری از a صعودی و به‌ازای چه مقادیری از a نزولی است؟ در چه حالتی نمایش تغییرات این تابع به صورت یك خط راست در می‌آید؟

ب- ثابت کنید که منحنی این تابع به‌ازای همهٔ مقادیر a از دو نقطه ثابت می گذرد، مختصات این دو نقطه را پیدا کنید.

ج- a را طوری پیدا کنید که مماس برمنحنی در نقطهٔ برخورد آن با محور عرض‌ها بر خط $2x=3y$ عمود باشد.

د- به ازای $a=1$ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۱۶- دو تابع $y=\frac{2x}{x-2}$ و $y=x^2-x$ را در نظر می‌گیریم.

الف- تغییرات بر دو تابع را بررسی و منحنی‌های نظیر آنها را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ب- نشان دهید که این دو منحنی در مبداء مختصات دارای مماس مشترك هستند. این مماس را رسم کنید.

ج- مختصات نقطهٔ دوم برخورد دو منحنی را محاسبه و معادله‌های مماس بر دو منحنی را در این نقطه پیدا کنید.

مسائل متفرقه

۱ ـ اگر a، b، c و d اعداد طبیعی باشند ثابت کنید

$$f(x)=x^{4a+3}+x^{4b+2}+x^{4c+1}+x^{4d}$$

بر x^3+x^2+x+1 بخش‌پذیر است.

۲ ـ ثابت کنید $f(x)=x^{m+1}-(m+1)x+m$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است $(m\in N)$.

۳ ـ ثابت کنید $f(x)=(x-3)^{2m}+(x-2)^m-1$ بر $(x-2)(x-3)$ بخش‌پذیر است $(m\in N)$.

۴ ـ چند جمله‌ای درجهٔ سومی پیدا کنید که بر $x-1$ بخش‌پذیر بوده و باقیماندهٔ آن بر $x+1$ ، $x+2$ و $x+3$ برابر با ۲۴ ـ باشد.

۵ ـ باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ برابر ۳ و باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر ۱ است باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر x^2-1 بدست آورید.

۶ ـ a و b را طوری تعیین کنید که‌عبارت: $p(x)=x^3+ax^2+bx+2$ بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر باشد.

۷ ـ اگر $2f(2-x)+3f(x-2)=x$ مطلوبست محاسبه $f(x)$

۸ ـ اگر $|x|\geqslant 2$ و $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ مطلوبست‌محاسبه $f(x)$.

۹ ـ اگر $f(x-c)=x^2$ مطلوبست تعیین $f(x)$.

۱۰ ـ اگر $af(x)+bf(-x)=cx$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۱۱ ـ اگر $f(x)=\frac{1}{x^3}$ و $g[f(x)]=x^2$ مطلوبست محاسبهٔ $g(x)$ و $g(2)$

۱۲ ـ اگر $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ و $f(3)$.

۱۳ ـ اگر $f(x)=\log x$ حاصل عبارت $Z=\frac{f(x)+f(y)}{f(\sqrt{xy})}$ را تعیین کنید.

۱۴ ـ اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبهٔ $fff(x)$ و $fff\left(\frac{1}{x}\right)$.

۱۵ ـ اگر $f(x+y\,,\,x-y)=x^2-y^2$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x,y)$ و $f(2,3)$.

۱۶ ـ اگر $f(x)=\log(1-x)$ ، مطلوبست تعیین $f(z)=f(x)+f(y)$ و محاسبهٔ z .

۱۷ ـ اگر $f(x)=\log_b^x$ ، مطلوبست تعیین $\frac{f[f(a)]}{f(a)}$

۱۸ ـ اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ مطلوبست $f(2x^2-1)$ و $f(7)$.

۱۹ ـ اگر $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ عبارت زیر را حساب کنید.

$$\underbrace{fff\ \dots\ f}_{n\ (\text{زوج})}(\operatorname{tg} t)$$

۲۰ ـ اگر $f(x)=a^x+b^x$ و $g(x)=\frac{f(x)}{f(x-2)}$ ، مطلوبست محاسبه $g(3)$

۲۱ ـ اگر $(x<0)$ $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ، مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۲۲ ـ اگر $f(x+y,\ x-y)=2(xy+y^2)$ ، مطلوبست محاسبهٔ $f(x,y)$.

۲۳ ـ اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ ، مطلوبست محاسبهٔ

$f\left(a+\frac{1}{a}\right)+g\left(a-\frac{1}{a}\right)$ $(0<a<1)$.

۲۴ ـ اگر $f(x)=\sin x+\cos x$ و $g(x)=x^2-x$ ، مطلوبست تعیین $f\circ g$.

۲۵ ـ اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2+x$ دامنهٔ تابع $g\circ f$ را تعیین کنید.

۲۶ ـ دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{[x]-[x^2]}$ را تعیین کرده و رسم کنید.

۲۷ ـ در حالات زیر دامنهٔ تابع $g\circ f$ و $f\circ g$ را بدست آورید (در حالاتی که $f\circ g$ و $g\circ f$ را می‌توان تشکیل داد).

۱) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ و $f(x)=\sqrt{x-2}$

۲) $g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ و $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$

۳) $g(x)=\sqrt{1-2x^2}$ و $f(x)=\sqrt{x^2-3}$

۲۸ ـ دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

آ) ـ $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

ب) ـ $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

پ) ـ $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

ج) ـ $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

ه) ـ $f(x)=\sqrt{\log\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$

۲۹ ـ دامنه هر یك از توابع زیر را تعیین کنید.

$(p>0)$

۱) $y=\sqrt{-px}$

۲) $y=\operatorname{Arccos}(1-2x)$

۳) $y=\operatorname{Arcsin}\sqrt{2x}$

۴) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log_{10}(2x-3)$

۵) $y=\log_{10}\sin(x-3)+\sqrt{15-x^2}$

۶) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\sqrt[3]{\sin x}$

۷) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$

۸) $y=\log_{10}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$

۳۰ ـ کدامیك از دسته توابع زیر با هم مساویند.

۱) $\begin{cases} f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \\ g(x)=\begin{cases}|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\varphi(x)=\log_{10}x^2\\ \psi(x)=2\log_{10}x\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\theta(x)=\sqrt{1+tg^2x}\\ k(x)=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$

۳۱ ـ اگر $\psi(x)=\log_{10}x$ ثابت کنید

$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi(x(x+1))$

۳۲ – اگر $f(x)=x+1$ و $\varphi(x)=x-2$ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

۳۳ – در تابع $f(x)=ax^2+bx+5$ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که اتحاد زیر همواره برقرار باشد.

$$f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$$

۳۴ – فرض کنیم $f(x)=a.\cos(bx+c)$ به ازای چه مقادیری از a ، b و c اتحاد زیر برقرار است.

$$f(x+1)-f(x)\equiv \sin x$$

۳۵ – کدامیک از توابع زیر، زوج یا فرد است.

۱) $y=x-x^2$

۲) $y=2^x$

۳) $y=3^{-x^2}+1$

۴) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

۵) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$

۶) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$

۷) $y=2^{x-x^2}$

۸) $y=\log\dfrac{1-x}{1+x}$

۳۶ – تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geqslant 0)\\ -x^2+1 & (x<0)\end{cases}$ مفروض است در زوج بودن تابع f تحقیق کنید.

۳۷ – تابع $f(x)=x^2$ درفاصلهٔ $[-1,2]$ درنظر می‌گیریم چرا تابع فوق زوج نیست؟

۳۸ – ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ درفاصلهٔ (a و $-a$) زوج ومتناوب است.

۳۹ – اگر $f:\ R\longrightarrow R$ ، $g:\ R\longrightarrow R$ و f زوج و g فرد باشد در مورد $g\circ f$ و $f\circ g$ چه میتوان گفت. (ثابت کنید)

۴۰ – هریک از توابع زیر را بصورت مجموع توابعی از زوج و فرد بنویسید.

۱) $y=x^2+3x+2$

۲) $y=1-x^3-x^4-2x^5$

۳) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}+\lg x$

۴۱ ـ ثابت کنید $f(x)+f(-x)$ تابعی زوج است و $f(x)-f(-x)$ همواره تابعی فرد است.

۴۲ ـ ثابت کنید هر تابع را می‌توان بصورت مجموع توابعی از زوج وفرد نوشت.

۴۳ ـ تابع $f(x)=(1+x)^{100}$ را بصورت مجموع توابعی از زوج و فردبنویسید.

۴۴ ـ ثابت کنید:

آ) ـ حاصلضرب دو تابع زوج ، زوج است.

ب) ـ حاصلضرب دو تابع فرد ،زوج است.

پ) ـ حاصلضرب یك تابع زوج، دریك تابع فرد، همواره تابعی فرد است.

۴۵ ـ فرض کنیم $(x>0)$ $f(x)=2\sqrt{x}+1$ باشد. در فاصلهٔ $(-\infty,0)$، ضابطهٔ $f(x)$ را برای‌هریك ازحالات زیرمشخص کنید:

آ) f تابعی زوج در R باشد.

ب) f تابعی فرد در R باشد.

۴۶ـ آیا تابع داده شده زوج است یا فرد.

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

۴۷ـ هریك از توابع زیررا بصورت جمع یك تابع زوج و یك تابع فرد بنویسید.

۱) $f(x)=|x|+|x-1|+|x+1|$

۲) $f(x)=x^4+x^3-x+3$

۴۸ـ تابعی $f:R\rightarrow R$ بنویسیدکه هم تابع زوج و هم تابع فرد باشد.

۴۹ـ اگر f و g به‌صورت زیرتعریف شده باشد فرمول $(f\circ g)(x)$ را پیداکنید.

۱) $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ \frac{1}{2}x & 0\leqslant x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$

۵۰ـ تابع $g:R\rightarrow R$ ، $g(x)=x^2$ مفروض است تابع f را طوری تعیین کنید که

$f \circ g(x) = x$ به شرطی که:

الف: $x \geqslant 0$ ، ب: $x < 0$

۵۱- هریک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$ (تابع پله‌ای واحد)

۲) $Sgnx = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$ (تابع علامت)

۵۲- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $g(x) = U(x) - U(x-1)$

۲) $G(x) = (x+1)U(x+1) - x.U(x)$

۳) $f(x) = \operatorname{sgn}x.U(x+1)$

۴) $g(x) = \operatorname{sgn}x + x.U(x)$

۵) $G(x) = \operatorname{Sgn}U(x)$

۵۳- کدامیک‌از توابع زیر متناوب است.

۱) $y = \sin^2 x$

۲) $y = \sin x^2$

۳) $y = x\cos x$

۴) $y = \sin\frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$

۵) $y = x - [x]$

۶) $y = 5$

۵۴- ثابت‌کنید اگر $1 > c > 0$ تابع

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c}$$

هر مقدار حقیقی را می‌گیرد.

۵۵- توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = [x^2 - 1]$

۲) $y = [\sqrt{x} + 1]$

۳) $y = [x^3 - 3x]$

۴) $y = x^2 - [x^2]$

۵۶- فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & (x\leqslant ۱) \\ ۳-ax^{۲} & (x>۱) \end{cases}$$

به ازای چه مقادیری از a ، f پیوسته است. نمودار $f(x)$ را رسم کنید.

۵۷- تابع

$$f(x)=\begin{cases} -۲\sin x & x\leqslant -\frac{\pi}{۲} \\ A\sin x+B & -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲} \\ \cos x & x\geqslant \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

مفروض است A و B را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)$ در فاصله $(-\infty$ و $+\infty)$ پیوسته باشد.

۵۸- مطلوبست محاسبهٔ $\varphi[\varphi(x)]$ ، $\psi[\psi(x)]$ ، $\varphi[\psi(x)]$ و $\psi[\varphi(x)]$ اگر:

$$\varphi(x)=\begin{cases} ۰ & x\leqslant ۰ \\ x & x>۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \psi(x)=\begin{cases} ۰ & x\leqslant ۰ \\ -x^{۲} & x>۰ \end{cases}$$

۵۹- فرض کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۱-|x| & |x|\leqslant ۱ \\ ۰ & |x|>۱ \end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ تابع $y=f(x)f(a-x)$ اگر:

آ) $a=۰$ ؛ ب) $a=۱$ ؛ پ) $a=۲$.

۶۰- مطلوبست تعیین ضابطهٔ تابع

$$y=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

اگر:

$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ و $f(x)=۰$ به‌ازای $۰\leqslant x\leqslant \pi$.

۶۱- با استفاده از تعریف حد ثابت کنید،

۱) $\lim\limits_{x\to -۲}(۵-x-x^{۲})=-۱$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{۱-۳x}=۲$

۳) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

۴) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ $(a>0)$

۵) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$ $(a \in \mathbb{R})$

۶۲- اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید.

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$$

۶۳- فرض کنید $h(x) = (x-1)\mathrm{Sgn}x$ ، نمودار $h(x)$ را رسم کنید. حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ ۲) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ ۳) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

۶۴- تابع $f(x) = \begin{cases} kx-3 & (x \leqslant -1) \\ x^2+k & (x>-1) \end{cases}$ مفروض است مطلوب است مقدار k به‌طوری که $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ وجود داشته باشد.

۶۵- مثالی از یک تابع بیاورید بطوریکه تابع در $x=1$ حد نداشته باشد ولیکن $|f|$ در $x=1$ حد داشته باشد.

۶۶- فرض کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \leqslant 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$$

الف) نشان دهید $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد.

ب) نشان دهید $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ وجود ندارد.

ج) فرمول تابع $f(x) \cdot g(x)$ را بنویسید.

د) نشان دهید $\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)$ وجود دارد و برابر ۴ است.

۶۷- ثابت کنید

۱) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

۲) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}} = (n)^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

۳) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m)$$

۴) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=10$$

۵) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$$

۶) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}=1$$

۷) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

۸) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$$

۹) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۰) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

۱۱) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$$

۱۲) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad(m\text{ و }n\in N)$$

۶۸- هرگاه $p(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ و n عدد طبیعی باشد

ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{n}$$

۶۹-

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}$$

۷۰-

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}{x^n}=2^n$$

۷۱-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}=\frac{3}{2}\sin 2a$$

۷۲-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{1}{4}$$

۷۳- نقاط انفصال توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$

۲) $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$

۳) $y=\sqrt{x}\,\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x}$

۴) $y=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{x}}{\cos\dfrac{\pi}{x}}$

۷۴- پیوستگی توابع زیر را بررسی ونمودار تقریبی آنها را رسم کنید.

۱) $y=x-[x]$

۲) $y=x^2-[x^2]$

۳) $y=x[x]$

۴) $y=\left[\frac{1}{x}\right]$

۵) $y=(-1)^{[x^2]}$

۷۵ – آیا مجموع دو تابع $f(x)+g(x)$ حتماً در نقطهٔ x_0 ناپیوسته خواهد بود اگر:

آ) به ازای $x=x_0$ تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد.

ب) هر دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای $x=x_0$ ناپیوسته باشند. مثالهای نظیر را بسازید.

۷۶– آیا حاصلضرب دوتابع $f(x)\cdot g(x)$ در نقطهٔ x_0 ناپیوسته است اگر:

آ) در این نقطه تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد.

ب) هر دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای $x=x_0$ ناپیوسته باشند. مثالهای نظیر را بسازید.

۷۷– آیا می‌توان گفت که مجذور یك تابع ناپیوسته، یك تابع ناپیوسته است؟ تابعی مثال بیاورید که همه جا ناپیوسته و مجذور آن یك تابع پیوسته باشد.

۷۸– مطلوبست محاسبهٔ مشتق ورسم نمودار توابع ونمودار مشتق آنها درصورتیکه

آ) $f(x)=|x|$

ب) $f(x)=x^2|x|$

پ) $y=\begin{cases}(x-1)^2+1 & (x\geqslant 1)\\ 2-x & (x<1)\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ (1-x)(2-x) & 1\leqslant x\leqslant 2\\ -(2-x) & 2<x\end{cases}$

۷۹–ثابت کنید مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ هرخط مماس برمنحنی $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=K^{\frac{1}{2}}$ برابر بامقدار ثابت K است.

۸۰– اگر $x^n.y^m=(x+y)^{n+m}$، ثابت کنید $xy'=y$.

۸۱– در چه نقطه‌ای از منحنی $x+\sqrt{xy}+y=1$، خط مماس برمنحنی موازی با محور x هاست.

۸۲– تابع $h(x)=\sqrt[3]{x+|x|}$ مفروض است، نمودار تابع را رسم کنید و $h'(x)$ را برای $x\neq 0$ تعیین کنید.

۸۳- ثابت کنید اگر تابع $f(x)$ مثبت باشد در آن صورت تابع

$$g(x) = cf^{۲}(x) \qquad (c>۰)$$

دقیقاً دارای همان نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

۸۴- بیشترین مقدار حاصلضرب درجهٔ m و n ($m>۰$ و $n>۰$) دو عدد مثبت را که مجموع آنها مقداری ثابت و برابر a است پیدا کنید.

۸۵- کمترین مقدار مجموع درجهٔ m و n ($m>۰$ و $n>۰$) دو عدد مثبت را که حاصلضرب آنها برابر مقدار ثابت a است پیدا کنید.

۸۶- در بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ مستطیلی محاط کنید که اضلاع آن موازی محورهای بیضی و دارای بیشترین مساحت باشد.

۸۷- در نیمکرهٔ به شعاع R مکعب مستطیلی به قاعدهٔ مربع با بیشترین حجم را محاط کنید.

۸۸- در کرهٔ به شعاع R استوانه با بیشترین مساحت کل را محاط کنید.

۸۹- بیشترین حجم مخروط با مولد مفروض L را پیدا کنید.

۹۰- کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(p,p)$ را از سهمی $y^{۲}=۲px$ پیدا کنید.

۹۱- از نقطهٔ $M(x,y)$ متعلق به بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ مماسی رسم کنید که با محورهای مختصات، مثلثی با کمترین سطح را تشکیل دهد.

۹۲ - از دایرهٔ به شعاع R، چه قطاعی باید برید تا از قسمت باقی مانده بتوان قیفی با بیشترین گنجایش را ساخت؟

تست جبر

تستهایی که در صفحات بعد ملاحظه خواهید کرد تهیه شده از سؤالات ریاضی سالهای مختلف آزمون سراسری دانشگاههای کشور است و هدف از ارائهٔ آنها این است که دانش‌آموزان عزیز با پاسخ به این تستها، تا حدودی با نمونهٔ سؤالات تستی و طریق حل آنها آشنا شوند. در آخر این مبحث کلید تستها نیز ارائه شده است.

۱- اگر $f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^5$ و $g(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^5}$ مقدار $f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

۲- درصورتی‌که R مجموعهٔ اعدادحقیقی بوده، $f:R\longrightarrow R$ با ضابطه $f(x)=x^2+4$ باشد وضعیت یك به یك و پوششی بودن f چگونه است؟

(۱) f پوششی است ولی یك به یك نیست.

(۲) f نه یك به‌یك است‌و نه پوششی است.

(۳) f یك به یك است ولی پوششی نیست.

(۴) f یك به یك و پوششی است.

۳- اگر $f:R\longrightarrow R$ و $g:R\longrightarrow R$ با ضابطه‌های $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=x+3$ باشند، $(g\circ f)(x)$ کدام است؟

(۱) x^2 (۲) x^2+x

(۳) $\dfrac{x+3}{x^2-3}$ (۴) x^3+3x^2-3x-9

۴- مقدار a چقدرباشد تا حاصلضرب طولهای‌نقاط تقاطع دو منحنی $y_1=x^2+ax$ و $y_2=ax-a+4$ برابر -1 گردد.

(۱) -2 (۲) 0 (۳) $+2$ (۴) $+1$

۵- درتابع $y=\dfrac{(a-1)(x+1)}{(4-a)(x-2)}$ مقدار a چقدر باشد تا حد این تابع وقتی x به بینهایت میل کند برابر $\dfrac{1}{2}$ شود؟

(۱) -2 (۲) 0 (۳) $\dfrac{1}{2}$ (۴) 2

۶- نمودار معادلهٔ $|x|+|y|=1$ کدام است؟

(۱) دایره (۲) یك مربع

(۳) یك پاره‌خط واقع بر نیمساز ربع اول (۴) یك لوزی

۷- هرگاه $f(x)$ تابعی باشدکه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$، آنگاه حدتابع $\left(f(x)+1\right)\sin\dfrac{\pi}{x^2}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) π

۸- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1} & (x\neq 0)\\ a & x=0\end{cases}$ مفروض است به ازای چه مقدار a این تابع در نقطهٔ بطول صفر پیوسته است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

۹- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{\alpha x-\beta x}$ حد کدامست؟ (α و β مقادیر ثابت هستند)

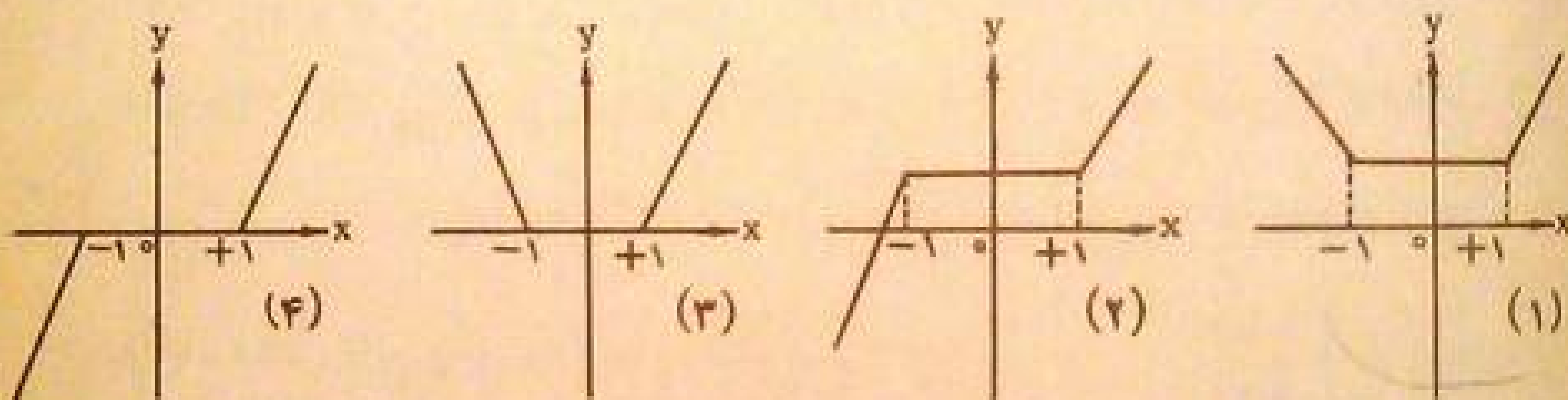
(۱) 0 (۲) $\alpha-\beta$

(۳) $\frac{1}{\alpha-\beta}$ (۴) 1

۱۰- بیشترین مقدار تابع $y=|\cos 3x+3\cos x|$ در فاصلهٔ $[0 , \pi]$ برابراست با:

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 4

۱۱- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=|x+1|+|x-1|$ کدام‌یک از صورت‌های زیر است؟



۱۲- مشتق تابع y نسبت به x در عبارت $xy=y+x$ برابر است با:

(۱) $\frac{x-1}{1-y}$ (۲) $\frac{1-y}{x-1}$

(۳) $\frac{1}{4}x^2y^2$ (۴) مشتق ندارد

۱۳- حد تابع $\frac{\sin x\cdot\sin 2x\ ...\ \sin nx}{tg x\cdot tg 2x\ ...\ tg nx}$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند برابر است با:

(۱) 1 (۲) $n!$ (۳) $\frac{1}{n!}$ (۴) بینهایت

۱۴- کوچکترین مقدار تابع $y=x^3-3x+1$ در فاصله $-2\leqslant x\leqslant 0$ برابر است با:

(۱) ۳ (۲) ۱− (۳) ۱ (۴) ۳−

۱۵- معادله مماس بر منحنی $y=\frac{x}{x^{2}+1}$ درنقطه (۰ و ۰) عبارتست از:

(۱) $y=x$ (۲) $y=\frac{1}{2}x$

(۳) $y=-\frac{1}{2}x$ (۴) $y=\frac{1}{x}$

۱۶- از نقطه (۴ و ۴) خطی برمنحنی $x^{2}+y^{2}-k^{2}=0$ عمود کرده‌ایم معادلهٔ این خط مساویست با:

(۱) $y=kx$ (۲) $x+y=k$

(۳) $x=y$ (۴) هیچکدام

۱۷- معادلهٔ $y=\frac{c}{x+1}$ مفروض است خطی که از نقاط (۲− ، ۵) و (۳ ، ۰) می‌گذرد براین معادله مماس است مقدار c دراین معادله برابراست با:

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۸- حد تابع $y=\frac{2x-1}{3x^{2}+5x}$ وقتیکه x به سمت بینهایت میل کند عبارتست از:

(۱) ۰ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۱۹- مشتق تابع $y=\sqrt[3]{3x+5}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}}$ (۲) $\frac{3x+5}{\sqrt[3]{3x+5}}$

(۳) $\frac{2}{\sqrt[3]{(3x+5)^{2}}}$ (۴) $\sqrt[3]{3x+5}$

۲۰- معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^{2}+1$ درمحل تلاقی منحنی با محور yها کدام است؟

(۱) $y=2x$ (۲) $y=1$

(۳) $y=-1$ (۴) $x=0$

۲۱- به ازای چه مقدار m ، خط $y=mx$ بر منحنی تابع $y=x^{2}+1$ مماس می‌گردد.

(۱) ۲ (۲) ۱− (۳) ۱± (۴) ۲±

۲۲- به ازای چه مقادیر a و b نقطهٔ $A(۱ ، ۲)$ نقطه می‌نیموم یا ماکزیمم منحنی تابع $y=۲x^۳+ax+b$ خواهد بود؟

(۱) $a=-۶ \ ، \ b=۶$ (۲) $a=۶ \ ، \ b=-۶$

(۳) $a=۱ \ ، \ b=۲$ (۴) $a=-۱ \ ، \ b=۲$

۲۳- خطوط مجانب منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۲x-۳}{x-۱}$ کدام است؟

(۱) $y=۲ \ ، \ x=\frac{۳}{۲}$ (۲) $x=۱ \ ، \ y=۲$

(۳) $x=۱ \ ، \ y=۰$ (۴) $x=۱ \ ، \ y=۱$

۲۴- به ازای چه مقادیر a و b نقطه $A\left|\begin{matrix}-۲\\۳\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تابع $y=\frac{ax+۲}{x+b}$ است؟

(۱) $b=۲ \ ، \ a=۳$ (۲) $a=۳ \ ، \ b=-۲$

(۳) $a=۲ \ ، \ b=۳$ (۴) $a=۲ \ ، \ b=۱$

۲۵- بازاء چه مقدار a عبارت $x^۳+ax^۲+x+۴$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۶

۲۶- درصورتیکه $f\left(\frac{x-۲}{x+۱}\right)=\frac{x-۱}{۲x}$ باشد، $f(x)$ عبارتست از:

(۱) $\frac{۲x+۴}{۲x+۱}$ (۲) $\frac{۲x+۱}{۲x+۴}$

(۳) $\frac{۲x}{۲x+۱}$ (۴) $\frac{۲x-۱}{۲x}$

۲۷- طول نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=x^۳-۶x^۲$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۲۸- به‌ازای چه مقادیر a تابع $y=\frac{ax+۱}{x-۲}$ در هریک از فواصل $(۲ ، +\infty)$ و $(-\infty ، ۲)$ صعودی است؟

(۱) $a<-\frac{۱}{۲}$ (۲) $a>-\frac{۱}{۲}$

(۳) $a<۲$ (۴) $a>۲$

۲۹- به ازای چه مقدار a خط $y=۲$ مجانب افقی منحنی نمایش $y=\frac{ax+۱}{x-۱}$ است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (۴) 1

۳۰- به‌ازای چه مقدار a خط $y=ax$ برمنحنی تابع $y=\frac{2x-3}{x}$ مماس میشود؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) -3 (۴) -2

۳۱- منحنی $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ دارای چند نقطه عطف است:

(۱) 1 (۲) 2

(۳) 0 (۴) 3

۳۲- می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) $\frac{1}{2}$

۳۳- نزدیکترین فاصله منحنی نمایش تابع $y^2=2x+5$ از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) -2 (۲) 2 (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{5}$

۳۴- دورهٔ تناوب تابع $y=\sin^2 2x-5\cos\frac{3}{4}x+tg\frac{2}{3}x$ کدامست؟

(۱) 8π (۲) 24π (۳) 144π (۴) 16π

۳۵- به‌ازای چه مقادیر m عبارت $\sqrt{mx^2+2mx+1}$ دارای معنی است؟

(۱) $0\leqslant m\leqslant 1$ (۲) $m>1$

(۳) $m\leqslant 1$ (۴) $0\leqslant m<1$

۳۶- حد عبارت $\frac{1-x^2}{(Arccos x)^2}$ وقتی $x\to 1^-$ برابر است با:

(۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 2

۳۷- بازاء چه مقدار m خط $y=mx$ از نقطه عطف منحنی تابع $y=x^3-6x^2$ می‌گذرد؟

(۱) 4 (۲) -4 (۳) -8 (۴) 8

۳۸- تابع $y=\sqrt{\log(x-2)}$ به‌ازای چه مقادیر x معین است؟

(۱) $۲<x\leqslant ۳$ (۲) $۲\leqslant x<۳$

(۳) $۲<x<۳$ (۴) $۳\leqslant x$

۳۹- مجموع ضرایب بسط $(y+x)^n$ کدام است؟

(۱) ۲^n (۲) $۲^{n+۱}$ (۳) $۲^{n-۱}$ (۴) $۲^{۲n+۲}$

۴۰- طول نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=x^۳-۶x^۲+۶x-۲$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $۲-\sqrt{۲}$

(۳) $۲+\sqrt{۲}$ (۴) -۱

۴۱- تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۱}}$ به ازای چه مقادیری از x معین است؟

(۱) $x\leqslant \frac{۱۷}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant \frac{۱۷}{۲}$

(۳) $x\geqslant \frac{۱}{۲}$ (۴) $x\geqslant \frac{۱۷}{۲}$

۴۲- کدامیک از توابع زیر زوج است؟

(۱) $x^۲\cos x$ (۲) $x^۲-tg x$

(۳) $x+\sin x$ (۴) $x+\cos x$

۴۳- باقیماندهٔ تقسیم عبارت $x^۶+۳x^۵-۲x^۴+x^۲-x+۱$ برعبارت $x^۲-۲$ کدام است؟

(۱) $۱۱x-۳$ (۲) $۲x+۱$

(۳) $۱۱x+۳$ (۴) $۲x-۱$

۴۴- از مبدأ مختصات دو مماس برمنحنی $y=x^۲-x+۲m$ رسم شده‌اند، به ازاء چه مقدار m این دو مماس برهم عمودند؟

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $-\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۵- جملهٔ مستقل از x در بسط $\left(x^۲-\frac{۱}{x}\right)^۶$ برابر با کدامیک از اعداد زیر است؟

(۱) -۲۰ (۲) -۱۵ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۴۶- تابع f بر مجموعهٔ اعداد حقیقی بوسیلهٔ $f(x)=x-x^۲$ تعریف شده‌است وقتی $x\to ۰$ این تابع هم ارز کدامست؟

(۱) $y=-x^۲$ (۲) $y=۱-x$

(۳) $y=x^۲$ (۴) $y=\sin x$

۴۷- مجموع ضرایب دوجمله‌ای $\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^{8}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۸

۴۸- نامساوی $-5 \leqslant x \leqslant 7$ معادل کدام است؟

(۱) $|x-2|\leqslant 5$ (۲) $|x-1|\leqslant 6$

(۳) $|x-3|\leqslant 4$ (۴) $|x-4|\leqslant 3$

۴۹- اگر $\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x}{ax}=\frac{1}{2}$ آنگاه a کدام است؟

(۱) -2 (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -4

۵۰- دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x)=\sin^2 2x+\cos^2 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۵۱- $\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{x^2}$ حد چقدر است؟

(۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) $+\infty$

۵۲- اگر باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ و $x+1$ به‌ترتیب برابر ۴ و ۲ باشد، آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)(x-1)$ برابر است با:

(۱) $x+3$ (۲) $3x+1$

(۳) $x-3$ (۴) $3x-1$

۵۳- دورهٔ تناوب تابع $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۵۴- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x|<x+2$ کدام است؟

(۱) ϕ (مجموعهٔ تهی) (۲) $\mathbb{R}$

(۳) $\{x|x<1\}$ (۴) $\{x|x>-1\}$

۵۵- در صورتی‌که $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ و $x^2+y^2=1$ مقدار می‌نیموم تابع $x+y$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۰

۵۶- برد تابع $(x\in\mathbb{R})$ و $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ برابر است با:

(۱) $[0 , 1]$ ، (۲) $[0 , 1[$

(۳) $[0 , \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3} , 1[$ (۴) $[0 , \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} , 1[$

۵۷- اگر باقیماندهٔ ax^3+bx^2+2x+c بر $x-1$ برابر ۲ باشد باقیماندهٔ تقسیم ax^2+bx+c بر $x-\frac{c}{a}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۱−

(۳) صفر (۴) با این معلومات محاسبه نمیشود.

۵۸- x چند باشد تا جمله پنجم عبارت $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^6$ برابر $\frac{5}{9}$ گردد.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۵۹- حد $\frac{tg\,bx-bx}{x^2 tg\,bx}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{b}{3}$ (۲) صفر (۳) b (۴) $\frac{b^2}{3}$

۶۰- اگر $f(tgx)=\cos 2x$ آنگاه $f(\cos x)$ برابر است با:

(۱) $tg\frac{x}{2}$ (۲) $\frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x}$

(۳) $\cos 2x$ (۴) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$

• ۶۱- اگر دامنه تعریف تابع $y=F(x)=\frac{3x^2-2x-4}{ax^2+bx+c}$ برابر R باشد (مجموعهٔ اعداد حقیقی) دامنهٔ تعریف کدامیک از توابع زیر نیز R میباشد؟

(۱) $F(x)=\frac{3x^2+2x-4}{bx^2+ax+c}$ (۲) $F(x)=\frac{ax^2+bx+c}{3x^2-2x-4}$

(۳) $F(-x)$ (۴) هیچکدام

۶۲- زاویه حاده بین دو منحنی $y=3x^2+5x+2$ و $y=x^3+2x^2+4x+3$ در محل تلاقی آنها

(۱) $arctg2$ (۲) $Arctg2$

(۳) $arctg(-2)$ (۴) صفر

۶۳- تابع $3x^2+3xy-3=0$ مفروض است آنگاه کدامیک صحیح است؟

(۱) طول نقطه می‌نیموم این تابع برابر است با $\frac{ay}{6}$

(۲) طول نقطه ماکزیمم این تابع برابر است با $\frac{-a}{6}$

(۳) طول نقطه ماکزیمم یا می‌نیموم این تابع برابر است با $\frac{-ay}{6}$

(۴) این منحنی ماکزیمم و می‌نیموم ندارد.

-۶۴- کدامیک از توابع زیر زوج است؟

(۱) $tgx \cdot Arc\sin x$ (۲) $\sin(Arctgx)$

(۳) $\sin x \cdot \frac{a^x - a^{-x}}{x}$ (۴) هرسه

-۶۵- اگر مشتق‌های دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ باهم برابر باشند آنگاه

(۱) طول نقاط ماکزیمم و می‌نیموم دوتابع باهم برابرند.

(۲) مماس برمنحنی $f(x)$ برمنحنی $g(x)$ نیز مماس است.

(۳) جهت تقعر و تحدب دو تابع یکسان می‌باشد.

(۴) هیچکدام

-۶۶- منحنی $m^2x^2 + my - m^2 + y + 3m - 2x + 1 = 0$ به‌ازای جمیع مقادیر m از یك نقطه ثابت می گذرد مختصات این نقطه کدام است؟

(۱) $A(-1 , -3)$ (۲) $A(1 , -3)$

(۳) هردو (۴) هیچکدام

-۶۷- معادلهٔ قائم برمنحنی $x^2 - 2x + y^2 + 3y = 9$ در نقطهٔ $(2 , 3)$؟

(۱) $4y = -7x - 13$ (۲) $4y - 7x + 13 = 0$

(۳) $4y + 7x = 13$ (۴) هیچکدام

-۶۸- دورهٔ تناوب تابع $y = |\cos x - \sin x|(1 + 4\sin x\cos x)$ ،

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

-۶۹- اگر $f\left(\frac{\sin x}{1-\sin x}\right) = \sin^2 x$ باشد، $f(\sin x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1-\cos^2 x}{1+\sin 2x}$ (۲) $\frac{1-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

(۳) $\frac{1-\cos x}{1+\sin x}$ (۴) $\left(\frac{\sin x}{1-\sin x}\right)^2$

۷۰- اگر $f(x)=|x+1|+|x-1|$ باشد کدامیک از تساویهای زیر همواره صحیح است؟

(۱) $f(x)\geqslant -2$ (۲) $f(x)>1$

(۳) $f(x)\geqslant 2$ (۴) $f(x)<-2$

۷۱- مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ برابراست با:

(۱) $5x^6$ (۲) $6x^5$ (۳) $7x^8$ (۴) $8x^7$

۷۲- حدکسر $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$ وقتی $x\to 0$ برابراست با:

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) ۱

۷۳- کدامیک از تابعهای زیر زوج است؟

(۱) $y=\sqrt{x^2+4}$ (۲) $y=\sqrt{x}$

(۳) $y=x^2+x$ (۴) $y=\frac{1}{x}$

۷۴- تابع $g:R-\{3\}\to R-\{5\}$ با ضابطه $g(x)=\frac{5x+3}{x-3}$ تعریف‌میشودوضعیت یك به یك و پوششی‌بودن g چگونه است؟

(۱) g یك به‌یك و پوششی است.

(۲) g یك به یك است ولی پوششی نیست.

(۳) g یك به‌یك نیست ولی پوششی است.

(۴) g نه یك به یك و نه پوششی است.

۷۵- اگر $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ و $g(x)=tg2x$ باشد کدامیک از تساویهای زیر صحیح است؟

(۱) $f\big(g(x)\big)=tg4x$ (۲) $f\big(g(x)\big)=tgx$

(۳) $f\big(g(x)\big)=tg2x$ (۴) $f\big(g(x)\big)=tg\frac{x}{2}$

۷۶- با شرط $af(x)+bf(-x)=cx$ ، $(a+b\neq 0)$ $f(x)$ برابراست با:

(۱) $\frac{x}{a-b}$ (۲) $\frac{ax}{a-b}$

(۳) $\frac{bx}{a-b}$ (۴) $\frac{cx}{a-b}$

۷۷- حد تابع $\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x^2-\sqrt[5]{4x^5-3}}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{13}$ (۳) $-\frac{7}{24}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۷۸- اگر $\frac{13\pi}{12}>x>\frac{5\pi}{12}$ و $Z=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ باشد کدامیک درست است؟

(۱) $\frac{1}{2}<Z\leqslant 1$ (۲) $-\frac{1}{2}<Z<\frac{1}{2}$

(۳) $-1<Z<1$ (۴) $-\frac{1}{2}<Z<\frac{1}{2}$

۷۹- تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ مفروض است کدامیک از روابط زیر درست است؟

(۱) $f\left(f(x)\right)=-\frac{x+1}{x}$ (۲) $f\left(f(x)\right)=\frac{1-x}{x}$

(۳) $f\left(f(x)\right)=\frac{x+1}{x}$ (۴) $f\left(f(x)\right)=\frac{x-1}{x}$

۸۰- مشتق تابع $y=\sin\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

(۲) $\sin x+\cos x$

(۳) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(۴) $\frac{1}{2}\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos x}$

۸۱- ماکزیمم مطلق تابع $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{7}{2}$ برابر است با:

(۱) 4 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) -4

۸۲- دورهٔ تناوب $y=\sin 2x+tg\frac{x}{3}+2\cos\frac{2x}{5}$ برابر است با:

(۱) 2π (۲) 5π (۳) 10π (۴) 15π

۸۳- کدامیک از عبارتهای زیر مشتق تابع $y=\sqrt[5]{(5x-1)^2}$ است؟

(۱) $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{(5x-1)^2}}$ (۲) $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^4}}$

(۳) $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{5x-1}}$ (۴) $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^2}}$

• ۸۴- اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد کدامیک از تساویهای زیر درست است؟

(۱) $(f\circ g)(x)=2$

(۲) $(f\circ g-g\circ f)(x)=2x$

(۳) $(f\circ g)(x)=g\circ f(x)$

(۴) $(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=0$

۸۵- تابع $f:R-\{2\} \longrightarrow R-\{3\}$ با ضابطه $f(x)=\frac{3x+7}{x-2}$ تعریف می‌شود وضعیت یك به‌یك و پوششی بودن f چگونه است؟

(۱) f یك به یك و پوششی است.

(۲) f یك به یك است ولی پوششی نیست.

(۳) f یك به یك نیست ولی پوششی است.

(۴) f نه یك به یك و نه پوششی است.

• ۸۶- مجموع ضرایب عددی بسط کثیرالجمله $f(x)=(x^2-x+1)^{20}(3x-2)^3$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲- (۳) صفر (۴) ۲

• ۸۷- شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای بطول $x=x_1$ پیوسته باشد کدام است؟

(۱) به‌ازای $x\to x_1$ تابع دارای حد باشد.

(۲) در نقطه داده شده معین و دارای حد چپ باشد.

(۳) در نقطهٔ داده شده معین و دارای حد راست باشد.

• (۴) در نقطهٔ داده شده معین و دارای حدی برابر با مقدارتابع باشد.

۸۸- ضریب زاویه خط قائم بر منحنی $x^2-2xy+2y^2-4y+2=0$ در نقطه $A(2,1)$ برابر است با:

(۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲-

۸۹- اگر طول نقطه عطف منحنی تابع $y=x^3+ax^2$ برابر یک باشد مقدار a مساوی است با:

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳- (۴) ۳

۹۰- دورهٔ تناوب $y=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{x}{6}$ برابر است با:

(۱) 18π (۲) 2π (۳) 6π (۴) 12π

۹۱- مختصات نقطه می‌نیموم تابع $y=2\cos x-1$ در فاصلهٔ $(0\,,\,2\pi)$ برابراست با:

(۱) $(0\,,\,1)$ (۲) $\left(\frac{\pi}{2}\,,\,-1\right)$

(۳) $(\pi\,,\,-3)$ (۴) $(2\pi\,,\,+1)$

۹۲- مشتق تابع $y=x|x|$ برابراست با:

(۱) $2x$ (۲) $|x|+\frac{|x|}{x}$

(۳) $\pm 2x$ (۴) $2|x|$

۹۳- حد تابع $f(x)=\frac{3-x}{1-\sqrt{x-2}}$ وقتی $x\to 3$ برابر است با:

(۱) ۲- (۲) صفر (۳) ۲ (۴) $+\infty$

۹۴- دورهٔ تناوب تابع $y=tg3x+\cos 2x$ برابر است با:

(۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 3π

۹۵- تابع $y=ax^4+bx^2+c$ با چه شرطی همواره دارای دو نقطه عطف است؟

(۱) $ab=1$ (۲) $ab=0$

(۳) $ab>0$ (۴) $ab<0$

۹۶- برد تابع $y=x-\sqrt{x}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty\,,\,+\infty)$ (۲) $[-\frac{1}{4}\,,\,+\infty)$

(۳) $(-\infty\,,\,-\frac{1}{2})$ (۴) $(-\infty\,,\,0]$

۹۷- مشتق تابع $y=\sin^2\sqrt{x}$ برابر است با:

(۱) $\frac{\cos 2\sqrt{x}}{x}$ (۲) $2\sin\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}$

(۳) $2\cos^2\sqrt{x}$ (۴) $\dfrac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

۹۸- تابع $y=\sqrt{\log(x^2-4)}$ بازاء چه مقادیر x معین است؟

(۱) $|x|>2$ (۲) $|x|\geqslant\sqrt{5}$

(۳) $2<x<\sqrt{5}$ (۴) $-\sqrt{5}<x<-2$

۹۹- دورهٔ تناوب $y=\sin^2 3x+\left[\frac{6}{\pi}x\right]-\frac{6}{\pi}x$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{\pi}{6}$ (۲) $\dfrac{\pi}{3}$

(۳) $\dfrac{2\pi}{3}$ (۴) 2π

۱۰۰- $Max\{a, b\}$ برابر با کدامیک از عبارتهای زیر است؟

(۱) $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$ (۲) $\dfrac{a-b}{2}+\dfrac{|a+b|}{2}$

(۳) $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$ (۴) $\dfrac{|a-b|}{2}+\dfrac{|a+b|}{2}$

۱۰۱- بردتابع $y=\sqrt{4-\sqrt{2x-1}}$ کدام است؟

(۱) $0\leqslant y\leqslant 2$ (۲) $y>2$ (۳) $y\geqslant 0$ (۴) $\mathbb{R}$

۱۰۲- کدامیک از توابع زیر زوج است؟

(۱) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 0)\\ x\sin x & (x<0)\end{cases}$ (۲) $g(x)=\begin{cases} |x-1| & (x\geqslant 0)\\ |x+1| & (x<0)\end{cases}$

(۳) $h(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0)\\ -\cos x & (x\leqslant 0)\end{cases}$ (۴) $T(x)=\begin{cases} x\sin x & (x\geqslant 0)\\ x\cos x & (x<0)\end{cases}$

۱۰۳- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geqslant 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ ، آنگاه $f(1-\sqrt{x})$ برابر است با:

(۱) $f(1-\sqrt{x})=\begin{cases} (1-\sqrt{x})^2+1 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -(1-\sqrt{x})^2 & (x>1)\end{cases}$

(۲) $f(1-\sqrt{x})=(1-\sqrt{x})^2+1$

(۳) $f(1-\sqrt{x})=-(1-\sqrt{x})^2$

$$f(1-\sqrt{x})=\begin{cases}(1-\sqrt{x})^2+1 & (x>1)\\ -(1-\sqrt{x})^2 & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases} \quad (۴)$$

۱۰۴- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geqslant 0)\\ -x^2-1 & (x<0)\end{cases}$ مفروض است، مجموعهٔ برد تابع کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}-[-1,0)$

(۳) $[-1,+\infty)$ (۴) $(-1,+\infty)$

۱۰۵- تابع معکوس، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & (x\geqslant 0)\\ -x^2-1 & (x<0)\end{cases}$ ، کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^3 & (x\geqslant 0)\\ -\sqrt{-1-x} & (x<-1)\end{cases}$

(۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ \sqrt{-1-x} & (x<-1)\end{cases}$

(۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ \sqrt{1-x} & (x<-1)\end{cases}$

(۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^3 & (x>0)\\ -\sqrt{-1+x} & (x<-1)\end{cases}$

۱۰۶- تابع f در $\mathbb{R}$ باضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ مفروض است، $f^{-1}(x)$ برابر است با :

(۱) $f^{-1}(x)=x|x|$ (۲) $f^{-1}(x)=x^2$

(۳) $f^{-1}(x)=-x^2$ (۴) $f^{-1}(x)=-x|x|$

۱۰۷- از مبدأ مختصات دومماس بر سهمی $y=x^2-2x+m$ رسم شده‌اند. بازاء چه مقدار m ، این دو مماس برهم عمودند؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰۸- عبارت x^4+4y^4 بر کدامیک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

(۱) x^2+2y^2+2xy

(۲) x^2-2y^2+2xy

(۳) x^2-2y^2-2xy

(۴) x^2+2y^2-4xy

۱۰۹- اگر $f(-x)+2f(x)=x^2$ باشد باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر است با:

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۱۰- اگر مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$ از مجموع ضرایب بسط $f(x)=(x^2+2x-2)^{100}$، ۳۱ واحد بیشتر باشد تعداد جمله‌های بسط $(a+b)^n$ برابر است با:

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۱- نمودار $y=\dfrac{x}{[x-1]}$ روی فاصلهٔ $]-1 , 1[$ بصورت:

(۱) دوخط (۲) یک پاره‌خط

(۳) دو پاره‌خط (۴) سه پاره‌خط

۱۱۲- توابع f و g در $\mathbb{R}$ بصورت $f(x)=\sqrt{x+3}$ و $g(x)=4-x$ تعریف‌شده‌اند، دامنهٔ $f\circ g$ برابر است با:

(۱) $]-\infty , 7]$ (۲) $[7 , +\infty[$

(۳) $]7 , +\infty[$ (۴) $[7 , 10]$

۱۱۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2x-[2x]$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) $\frac{3}{2}$

۱۱۴- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{1-\cos 2x}$ حد برابر است با:

(۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) حد ندارد

۱۱۵- مشتق n ام تابع $y=2\cos^2\frac{x}{2}$ برابر است با:

(۱) $\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$ (۲) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$

(۳) $\cos n\pi$ (۴) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

۱۱۶- مستطیلی به‌محیط $4a$ مفروض است مساحت ماکزیمم این مستطیل برابر است با:

(۱) $\frac{2}{3}a^2$ (۲) $\frac{3}{4}a^2$ (۳) a^2 (۴) $\frac{3}{2}a^2$

۱۱۷- برد تابع $(x\in\mathbb{R})$ $y=f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$ کدام است؟

(۱) $]-\infty\ ,\ 1[$ (۲) $]-\infty\ ,\ +1]$

(۳) $[0\ ,\ 1]$ (۴) $(0\ ,\ 1)$

۱۱۸- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-2|x|}$ کدام است؟

(۱) $\{0\}$ (۲) $\{x|x\geqslant 0\}$

(۳) $\{x|x\leqslant 0\}$ (۴) $[0\ ,\ 1]$

۱۱۹- مجموع جبری ضرائب بسط عبارت $(2x^2+x-2)^{99}+(2x^3+x^2-x-1)^6+4$ کدامست؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۲۰- اگر $a\neq 0$ و $g(x)=f(ax)$ و $g'(0)=2$ باشد، $f'(0)$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{a}$ (۲) $2a$ (۳) $\frac{2}{a}$ (۴) $-2a$

۱۲۱- منحنی نمایش تابع $y=x^3-3x^2$ در نزدیکی نقطهٔ $x=1$ و بازه مقادیر کمتر و بیشتر از آن به ترتیب:

(۱) صعودی و صعودی است.

(۲) صعودی و نزولی است.

(۳) نزولی و صعودی است.

(۴) نزولی و نزولی است.

۱۲۲- درصورتی که $xy+yz+zx=12$ باشد ماکزیمم xyz کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۱۲۳- دورهٔ تناوب $y=\sin\frac{x}{2}+\cos 4x$ کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

۱۲۴- مقدار مشتق تابع $y=tg(\cos x)$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) ۱ (۳) π (۴) صفر

۱۲۵- حد عبارت $\frac{2+2\cos 4\pi x}{(4x-1)^2}$ وقتی که $x \to \frac{1}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) π^2 (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۲۶- وارون تابع $f: R \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=2x+3$ کدام است؟

(۱) $2x+3$ (۲) $\frac{1}{2}x+3$

(۳) $2x-3$ (۴) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

۱۲۷- در کدام نقطه دو سهمی $y=x^2$ و $x=y^2$ برهم عمودند؟

(۱) $(0, 0)$ (۲) $(0, 1)$

(۳) $(1, 0)$ (۴) $(1, 1)$

۱۲۸- مجموع ضرایب بسط عبارت $f(x)=(5x^3-2x-2)^5-(x^2+3)^2$ مساوی است با:

(۱) -15 (۲) 12 (۳) 14 (۴) -13

۱۲۹- برای آنکه $(x-\alpha)(x-\beta)+k$ بر $x-\alpha-\beta$ بخش‌پذیر باشد باید k برابر باشد با:

(۱) $-\alpha\beta$ (۲) $-(\alpha+\beta)$

(۳) $\alpha\beta$ (۴) $\alpha+\beta$

۱۳۰- $f(x)$ تابعی است از یک خط مثلثاتی داریم $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ درنتیجه $f(x)$ تابعی است از:

(۱) $\sin\frac{x}{2}$ (۲) $tg\frac{x}{2}$

(۳) $\sin 2x$ (۴) $tg\, 2x$

۱۳۱- معادله‌وتر مشترک دو منحنی $y=\frac{x-1}{x-2}$ و $y=\frac{2x-1}{x-3}$ کدام است؟

(۱) وتر مشترک ندارند (۲) $x+2y=0$

(۳) $x-y=0$ (۴) $x+y=0$

۱۳۲- مشتق تابع $y=\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$ عبارت است از:

(۱) $y'=\sin x-\cos x$ (۲) $y'=\cos x+\sin x$

(۳) $y'=\frac{1}{(\sin x-\cos x)^2}$ (۴) $y'=1-\sin 2x$

۱۳۳- $\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)\sin\lambda x}{1-\cos 2x}$ برابر است با:

(۱) $\frac{2\lambda}{3}$ (۲) $\frac{3\lambda}{4}$ (۳) $\frac{\lambda}{2}$ (۴) $\frac{\lambda}{3}$

۱۳۴- اگر u و v تابع‌هایی از x و u' و v' مشتق‌های آنها باشند از $\frac{u'}{v'}-\frac{u}{v}=0$

نتیجه می‌شود:

(۱) $\frac{u}{v}$ ثابت است.

(۲) $u\,.\,v$ ثابت است.

(۳) $u+v$ ثابت است.

(۴) u برابر صفر است.

۱۳۵- منحنی به‌معادلهٔ $y=(2x+1)^2+(3x-12)^2+(x+1)^2$ محورxها را

(۱) در یک نقطه قطع می‌کند.

(۲) در دو نقطه قطع می‌کند.

(۳) در سه نقطه قطع می‌کند.

(۴) قطع نمی‌کند.

۱۳۶- a و b چقدرباشد تا نقطه عطف منحنی به‌معادلهٔ $y=x^3+ax^2+b$ به‌مختصات (۲ ، ۱) باشد؟

(۱) $a=2$ ، $b=4$

(۲) $a=-3$ ، $b=4$

(۳) $a=4$ ، $b=2$

(۴) $a=4$ ، $b=-3$

۱۳۷- چندجمله‌ای $f(x)$ را یک‌بار بر $x+1$ و بار دیگر بر $x-1$ تقسیم کرده‌ایم باقیماندها به ترتیب ۱ و۳شده‌اند. باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-1 کدام است؟

(۱) $x+3$ (۲) $x+2$

(۳) $2x+2$ (۴) $2x+3$

۱۳۸- اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، ضریب x^n در بسط دو جمله‌ای $(1+x)^{2n}$ کدام است؟

۱) $\frac{(2n+1)!}{((n+1)!)^2}$ ۲) $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

۳) $\frac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$ ۴) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

۱۳۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|$ مساوی کدامیک از توابع است؟

۱) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right|$ ۲) $\left|\frac{x^2-4}{x+2}\right|$

۳) $\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$ ۴) $\frac{|6x-12|}{6}$

۱۴۰- مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $|x-1|+|x-3|=1$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $[-3 , 1]$ ۴) $\mathbb{R}-(-3 , 1)$

۱۴۱- اگر $f(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1+\cos 2x}$ و تابع f در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۲- مربع مستطیلی که یك ضلع آن بر روی محور x ها و دوراس آن بر روی $y=-x^2+4$ می‌باشد مفروض است اگر مساحت این مربع‌مستطیل ماکزیمم باشد آنگاه مقدار آن کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $16\sqrt{2}$

۳) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{32}{3\sqrt{3}}$

۱۴۳- اگر به‌ازای هر x ، $f(x)=|3\sin x+4\cos x|$ آنگاه بزرگترین مقدار f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۴- وارون تابع $f:R\longrightarrow R$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 1) \\ 2x-1 & (x<1) \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & (x<1) \\ \sqrt{x} & (x\geqslant 1) \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 & (x<1) \\ \sqrt{x} & (x\geqslant 1) \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} 2x+1 & (x<1) \\ \frac{1}{2}x-1 & (x\geqslant 1) \end{cases}$ ، (۴) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & (x<1) \\ \sqrt{x} & (x\geqslant 1) \end{cases}$

۱۴۵- اگر مجموع ضرایب بسط $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^m$ ازمجموع ضرایب بسط $(a-b)^{19}$ شانزده واحد بیشتر باشد جمله فاقد x بسط فوق برابر است با:

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

۱۴۶- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ و $0<a<1$ باشد حاصل $f\left(a+\frac{1}{a}\right)+g\left(a-\frac{1}{a}\right)$ کدام است؟

(۱) $2a$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{a}{2}$ (۴) $-\frac{2}{a}$

۱۴۷- کثیرالجملهٔ $f(x)=(x-3)^{2m}+(x-2)^m-1$ بر کدامیک از عبارتهای زیر بخش‌پذیر است؟

(۱) فقط بر $(x-3)$

(۲) فقط بر $(x-2)$

(۳) بر $(x-3)(x-2)$

(۴) بر $(x-3)(x+2)$

۱۴۸- اگر $f(x)=Arc\cos(\log x)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ باشد، $f[g(10)]$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) ۱ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۱۴۹- اگر عبارت ax^4-x^2+b بر x^2+2 قابل‌قسمت باشد، باقیمانده تقسیم‌عبارت $x^2-2ax+b$ بر $x+2$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۰ (۳) ۸ (۴) -10

۱۵۰- منحنی به معادله $y=x^4-3x-1$ بر کدام خط مماس است؟

(۱) $y=x+3$ (۲) $y=x-4$

(۳) $y=x-3$ (۴) $y=x-1$

۱۵۱- حد $\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ وقتی‌که $x\to 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

۱۵۲- مشتق تابع $y=|\cos x|$ در نقطه $A(\frac{\pi}{2} , 0)$ کدام است؟

(۱) ۱- (۲) ۱
(۳) صفر (۴) مشتق ندارد

۱۵۳- تابع $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$.

(۱) زوج است.
(۲) فرد است.
(۳) نه زوج است و نه فرد.
(۴) گاهی زوج و گاهی فرد است.

۱۵۴- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=(-1)^{(x)}(x-[x])$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) متناوب نیست

۱۵۵- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشد، دامنهٔ $f\circ g$ کدام است؟

(۱) $]1 , +\infty[$ (۲) $[0 , 1]$
(۳) $[1 , 2]$ (۴) $[1 , +\infty[$

۱۵۶- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x\sqrt{|x|}}{|x|} & (x\neq 0)\\ 0 & x=0\end{cases}$ مفروض است معکوس f کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x)=\frac{x}{|x|}$ (۲) $f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$

(۳) $f^{-1}(x)=x|x|$ (۴) $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{|x|}}$

۱۵۷- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$ در نقطهٔ بطول $x=\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۲- (۳) ۴- (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۵۸- اگر $f(3x^2-1)=x^2+x-2$ باشد، $\lim_{x\to 2} f(x)$ حد کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۵۹- اگر $f(x+۱)=x^۲$ باشد، $f(x)$ برابر است با:

(۱) $(x-۱)^۲$ (۲) $x^۲-۱$

(۳) $x^۲+۱$ (۴) $x^۲-۲x-۴$

۱۶۰- معادلهٔ $|۲x-۳|<۵$ معادل است با:

(۱) $x>۴$ (۲) $x<-۱$

(۳) $-۱<x<۴$ (۴) $۱<x<۵$

۱۶۱- به ازای کدامیک از مقادیر x عبارت $\sqrt{(x-۱)^۲}+\sqrt{(۳-x)^۲}$ برابر ۲ می‌شود.

(۱) فقط به ازای $x=۳$

(۲) فقط به ازای $x=۱$

(۳) بازای $۱\leqslant x\leqslant ۳$

(۴) فقط به ازای $x=۱$ و $x=۳$

۱۶۲- ضابطهٔ تابع معکوس برای تابع $y=x^۳-۳x^۲+۳x-۲$ عبارت است از:

(۱) $y=-۱+\sqrt[۳]{x+۱}$

(۲) $y=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$

(۳) $y=۱+\sqrt[۳]{x+۱}$

(۴) $y=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$

۱۶۳- مشتق تابع $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\dots}}}$

(۱) $\frac{\cos x}{۲y-۱}$ (۲) $\frac{\cos x}{۲y}$

(۳) $\frac{\cos x+y}{۲y}$ (۴) $\frac{\cos x-y}{۲y+۱}$

۱۶۴- دورهٔ تناوب تابع $y=\cos ۲\pi x+tg ۳\pi x$ برابر است با:

(۱) ۲π (۲) π (۳) ۳ (۴) ۱

۱۶۵- اگر عبارت $x^۶+ax^۳+bx^۲+۱$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد حاصل $a-۲b$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶۶- اگر $f(x)=x^۳$ ، $۰\leqslant x\leqslant ۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ ، $۰\leqslant x\leqslant ۲$ ، در این

صورت دامنهٔ تعریف $f o g$ کدام است؟

(۱) $\{۰\}$ (۲) $\{۱\}$

(۳) $[۰ , ۲]$ (۴) $]۰ , ۲[$

۱۶۷- x و y دوعدد حقیقی‌اند به‌طوریکه $x+y=۱$ کمترین مقدار $x^۲+y^۲$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۸}$ (۴) $\frac{۷}{۸}$

۱۶۸- مشتق تابع $f(x)=\sin(\cos x)$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۱}{۲}$ (۲) صفر (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) ۱

۱۶۹- فرض کنیم تابع $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ روی R مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم باشد، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $h(x)=f(۱-۴x^۲)$ و $f'(۱)=۱$ مقدار $h''(۰)$ کدام است؟

(۱) -۱۶ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۷۰- حد تابع $f(x)=x\,tg\frac{\pi}{۲x}$ وقتی که $x \longrightarrow +\infty$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{۲}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{۲}{\pi}$ (۴) $+\infty$

۱۷۱- یک دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^۲\frac{\pi}{۳}x+\sin\pi x$ برابر کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۷۲- حد عبارت $\frac{۴x-\sqrt{۲x+۱}}{x+\sqrt{x^۲+۲}}$ وقتی‌که $x \longrightarrow +\infty$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $+\infty$

۱۷۳- فرض کنیم که $A(۲ , ۰)$، $B(-۲ , ۰)$ ، $C(۲\sin\alpha$ و $۳\cos\alpha)$ سه راس یک مثلث باشند، با تغییر راس C ، مکان هندسی محل برخورد سه میانه مثلث چه شکلی است؟

(۱) بیضی (۲) دایره

(۳) سهمی (۴) هذلولی

۱۷۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_x(x^۲-۱)$ کدام است؟

(۱) $x>۱$ یا $x<-۱$ (۲) $x\geqslant۱$

(۳) $|x|<۱$ (۴) $x>۱$

۱۷۵- فرض کنیم که $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+8}-2) & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$ اگر f در نقطهٔ صفر پیوسته باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۷۶- فرض کنید که $f(x)=(x-a)(2x-a)\ \ldots\ (nx-a)$ در این صورت، $f'(a)$ کدام است؟

۱) $(n-1)!a^{n}$ ۲) $(n-1)!a^{n-1}$

۳) $n!a^{n}$ ۴) $n!a^{n-1}$

۱۷۷- نزدیکترین نقطهٔ منحنی $x^2-y^2=1$ به نقطهٔ $P(2,0)$ کدام است؟

۱) $(-\sqrt{2}\ ,\ 1)$ ۲) $(-1\ ,\ 0)$

۳) $(1\ ,\ 0)$ ۴) $(\sqrt{2}\ ,\ 1)$

۱۷۸- اگر $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$ ، آنگاه بیشترین مقدار $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷۹- اگر $\frac{f(x)}{\cos x}+\frac{f(-x)}{\sin x}=2$ آنگاه $f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

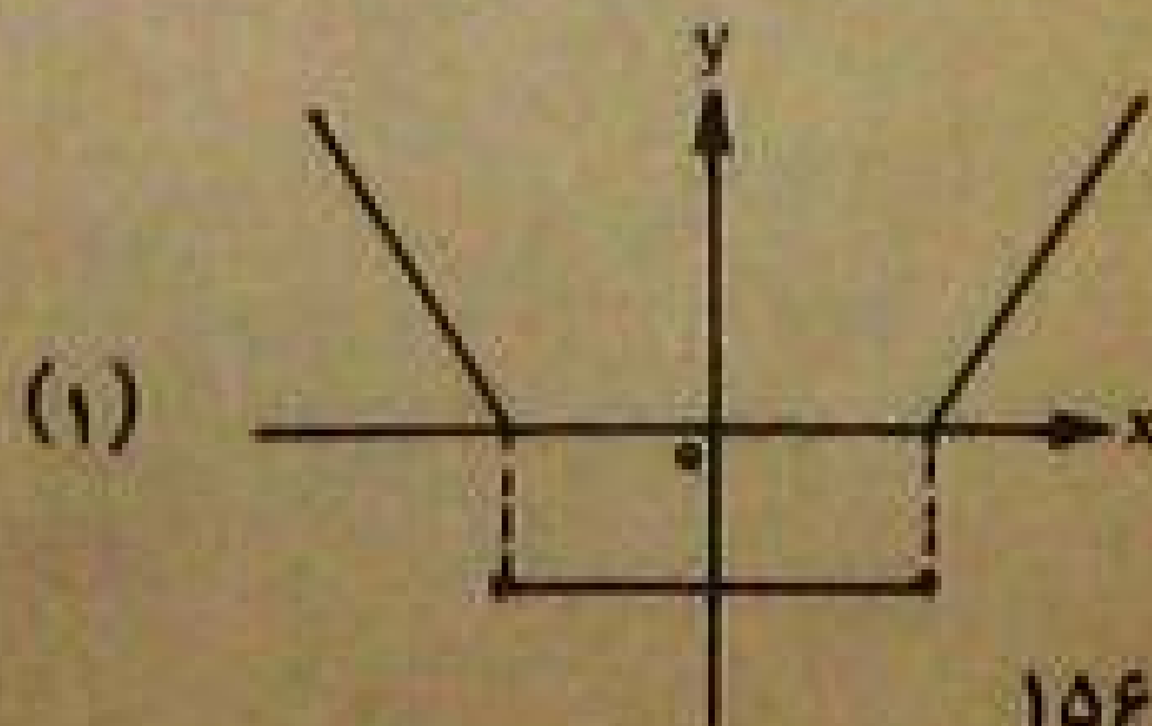
۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۸۰- به ازای چه مقدار m منحنی به معادلهٔ $y=\frac{2x-3}{mx-1}$ دارای مجانب $y=-2$ است.

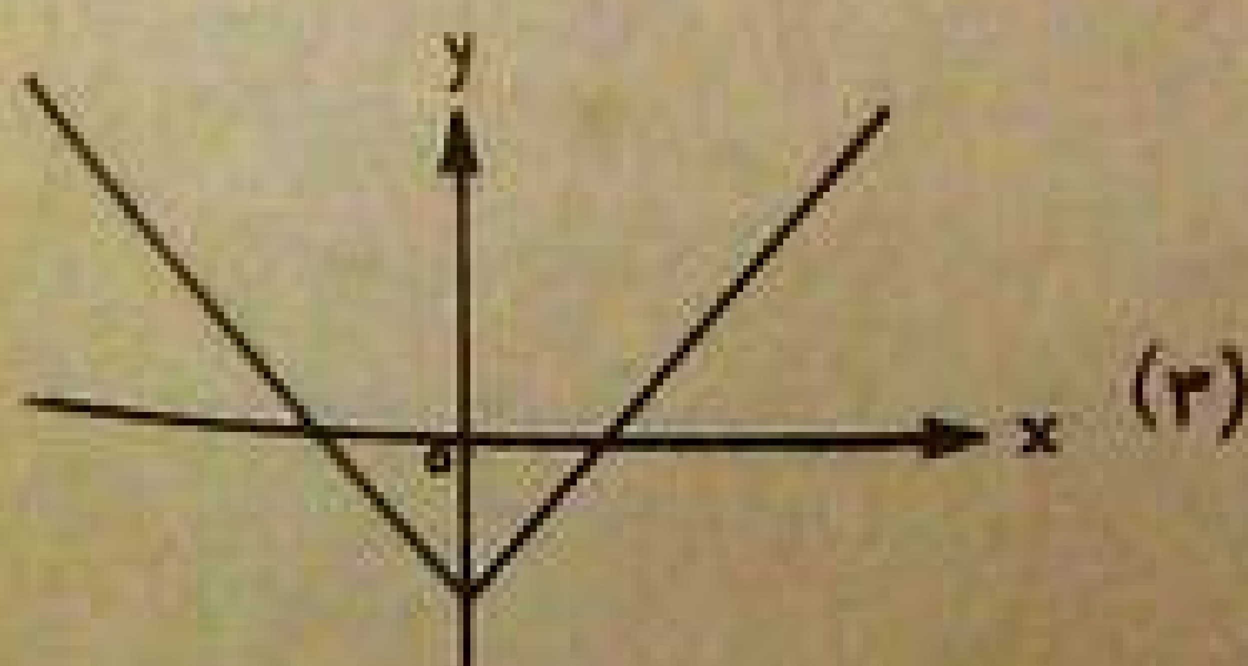
۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

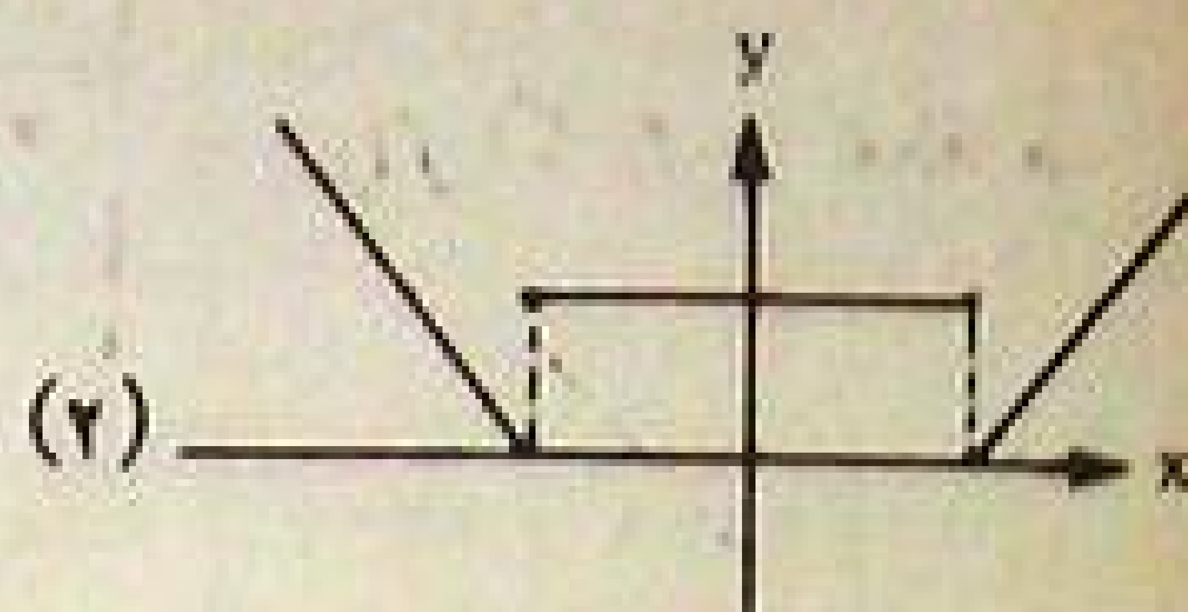
۱۸۱- منحنی نمایش تابع $y=f(x)=\big||x|-2\big|$ کدام است؟

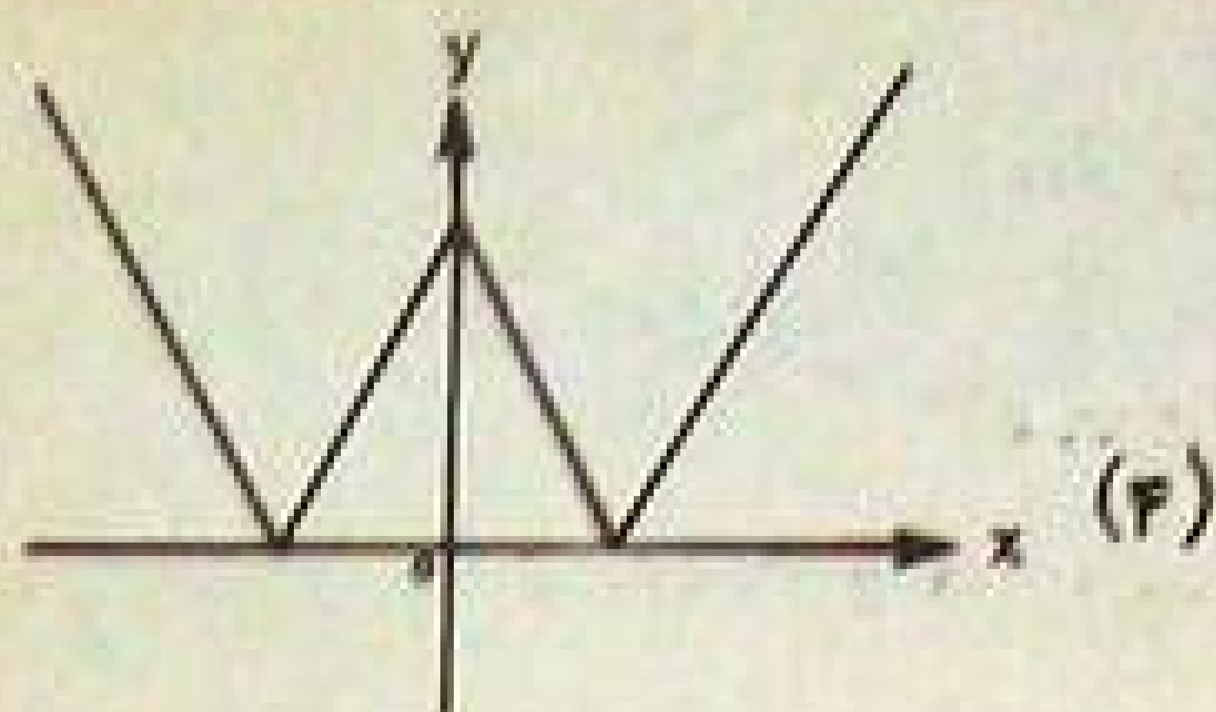
(۱)



(۳)



(۲) 

(۴) 

۱۸۲- حد عبارت $\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9}$ وقتی که $x \to 3$ ، برابر کدام است؟

(۱) 0 (۲) 1 (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{18}$

۱۸۳- فرض کنیم $f\big(g(x)\big)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$ ، $g(x)=x-\frac{1}{x}$ در این صورت، $f(x)$ کدام است؟

(۱) x^2-4 (۲) x^2-2

(۳) x^2 (۴) x^2+2

۱۸۴- وارون تابع $y=2x+14$ کدام است؟

(۱) $y=-\frac{1}{2}x-7$ (۲) $y=-\frac{1}{2}x+7$

(۳) $y=\frac{1}{2}x-7$ (۴) $y=\frac{1}{2}x+7$

۱۸۵- مساحت نمودار رابطهٔ $S=\{(x , y) \mid 0<x<2 ، 0\leqslant y\leqslant x-[x]\}$ در صفحه برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۱۸۶- کدامیک از توابع مثلثاتی بر بازهٔ $[\pi , 2\pi]$ صعودی است؟

(۱) $y=\sin x$ (۲) $y=\cos x$

(۳) $y=tg x$ (۴) $y=cotg x$

جدول پاسخ تست جبر

۱-۲	۲۲-۱	۴۳-۳	۶۴-۱	۸۵-۱	۱۰۶-۱	۱۲۷-۱	۱۴۸-۴	۱۶۹-۲
۲-۲	۲۳-۲	۴۴-۱	۶۵-۳	۸۶-۱	۱۰۷-۳	۱۲۸-۱	۱۴۹-۴	۱۷۰-۱
۳-۱	۲۴-۱	۴۵-۳	۶۶-۱	۸۷-۴	۱۰۸-۱	۱۲۹-۱	۱۵۰-۲	۱۷۱-۴
۴-۳	۲۵-۴	۴۶-۴	۶۷-۲	۸۸-۴	۱۰۹-۳	۱۳۰-۴	۱۵۱-۲	۱۷۲-۲
۵-۲	۲۶-۲	۴۷-۲	۶۸-۱	۸۹-۳	۱۱۰-۴	۱۳۱-۴	۱۵۲-۴	۱۷۳-۱
۶-۲	۲۷-۴	۴۸-۲	۶۹-۲	۹۰-۴	۱۱۱-۳	۱۳۲-۲	۱۵۳-۲	۱۷۴-۴
۷-۱	۲۸-۱	۴۹-۴	۷۰-۳	۹۱-۳	۱۱۲-۱	۱۳۳-۳	۱۵۴-۲	۱۷۵-۱
۸-۲	۲۹-۳	۵۰-۳	۷۱-۴	۹۲-۴	۱۱۳-۱	۱۳۴-۱	۱۵۵-۴	۱۷۶-۲
۹-۴	۳۰-۱	۵۱-۲	۷۲-۱	۹۳-۳	۱۱۴-۲	۱۳۵-۱	۱۵۶-۳	۱۷۷-۳
۱۰-۴	۳۱-۲	۵۲-۱	۷۳-۱	۹۴-۲	۱۱۵-۴	۱۳۶-۲	۱۵۷-۱	۱۷۸-۱
۱۱-۱	۳۲-۳	۵۳-۱	۷۴-۱	۹۵-۴	۱۱۶-۳	۱۳۷-۲	۱۵۸-۱	۱۷۹-۳
۱۲-۲	۳۳-۲	۵۴-۴	۷۵-۱	۹۶-۲	۱۱۷-۴	۱۳۸-۴	۱۵۹-۱	۱۸۰-۱
۱۳-۱	۳۴-۲	۵۵-۱	۷۶-۴	۹۷-۴	۱۱۸-۱	۱۳۹-۴	۱۶۰-۳	۱۸۱-۴
۱۴-۲	۳۵-۱	۵۶-۲	۷۷-۳	۹۸-۲	۱۱۹-۴	۱۴۰-۱	۱۶۱-۳	۱۸۲-۴
۱۵-۱	۳۶-۱	۵۷-۳	۷۸-۱	۹۹-۲	۱۲۰-۳	۱۴۱-۴	۱۶۲-۳	۱۸۳-۲
۱۶-۳	۳۷-۳	۵۸-۳	۷۹-۴	۱۰۰-۱	۱۲۱-۴	۱۴۲-۴	۱۶۳-۱	۱۸۴-۳
۱۷-۳	۳۸-۴	۵۹-۴	۸۰-۳	۱۰۱-۱	۱۲۲-۲	۱۴۳-۲	۱۶۴-۱	۱۸۵-۲
۱۸-۱	۳۹-۱	۶۰-۲	۸۱-۱	۱۰۲-۲	۱۲۳-۴	۱۴۴-۱	۱۶۵-۴	۱۸۶-۳
۱۹-۱	۴۰-۱	۶۱-۳	۸۲-۴	۱۰۳-۱	۱۲۴-۱	۱۴۵-۲	۱۶۶-۱	
۲۰-۲	۴۱-۲	۶۲-۴	۸۳-۴	۱۰۴-۴	۱۲۵-۲	۱۴۶-۲	۱۶۷-۱	
۲۱-۴	۴۲-۱	۶۳-۴	۸۴-۳	۱۰۵-۱	۱۲۶-۴	۱۴۷-۳	۱۶۸-۲	



قیمت در تمام کشور ۴۰۰ ریال

۱۳۷۲